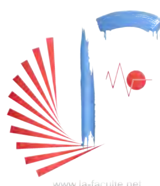
In the name of Allah, the Most Gracious, the Most Merciful



Copyright disclaimer

"La faculté" is a website that collects medical documents written by Algerian assistant professors, professors or any other health practicals and teachers from the same field.
Some articles are subject to the author's copyrights.
Our team does not own copyrights for the most content we publish.
"La faculté" team tries to get a permission to publish any content; however , we are not able to be in contact with all authors.
If you are the author or copyrights owner of any kind of content on our website, please contact us on: facadm16@gmail.com to settle the situation.
All users must know that "La faculté" team cannot be responsible anyway of any violation of the authors' copyrights.
Any lucrative use without permission of the copyrights' owner may expose the user to legal follow-up.




EXERCICES DE PROBABILITÉS

1. Une urne contient 4 boules rouges et 7 boules blanches ; on effectue des tirages sans remise des 11 boules. Étant donné un entier k vérifiant : $1 \leqslant k \leqslant 11$, on désigne par p_k la probabilité pour que la première boule blanche tirée le soit au $k^{\text{ième}}$ tirage.

a. Calculer p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et p_6. Que vaut p_k si $k \geqslant 6$?

b. Calculer $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$. Expliquer ce résultat.

---

2. Trois urnes U_1, U_2 et U_3 contiennent respectivement 2 boules rouges et 2 boules vertes, 1 boule rouge et 3 boules vertes, 3 boules rouges et 1 boule verte.
Trois joueurs J_1, J_2 et J_3 se voient attribuer respectivement les urnes U_1, U_2 et U_3.
Une partie est jouée lorsque chacun des 3 joueurs a extrait au hasard une boule de son urne.
Un des joueurs est déclaré vainqueur s'il obtient une boule de couleur différente de celle des deux autres joueurs.

1. ***a.*** Montrer qu'il y a au plus un vainqueur.

b. Calculer la probabilité des événements :
E_1 : « J_1, J_2 et J_3 tirent une boule rouge ».
E_2 : « J_1, J_2 et J_3 tirent une boule verte ».

c. En déduire la probabilité des événements :
E : « Il n'y a pas de vainqueur ».
A : « Il y a un vainqueur ».

2. ***a.*** Calculer la probabilité $p(\text{B})$ de l'événement B : « J_1 est vainqueur ».

b. Déterminer la probabilité $p(\text{C})$ de l'événement C : « J_1 a gagné la partie sachant qu'il y a eu un vainqueur ».

---

3. Dans tout l'exercice, les probabilités seront données *au centième près par défaut*.
Une laiterie fabrique des fromages dont la masse théorique est de 250 g.
X est la variable aléatoire ayant pour valeurs les masses possibles du produit exprimées en grammes.
p_i est la probabilité pour qu'un fromage soit de masse x_i.
On donne :

$X = x_i$	220	230	240	250	260	270	280
$p(X=x_i)=p_i$	0,08	0,10	0,15	0,32	0,16	0,15	0,04

1. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

2. On prélève un fromage au hasard. Quelle est la probabilité pour que sa masse soit au moins de 250 g ?

3. On prélève au hasard dix fromages. (On admettra que les tirages sont avec remise et indépendants.)

a. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un fromage de 220 g ?

b. Quelle est la probabilité d'avoir au plus un fromage de 220 g ?

4. La production est vérifiée par une machine chargée d'éliminer les produits de masse strictement inférieure à 250 g. La probabilité qu'un fromage de 220 g soit éliminé est 1 ; elle est de 0,8 s'il s'agit d'un fromage de 230 g et de 0,7 pour un fromage de 240 g. La machine n'élimine pas les fromages de masse supérieure ou égale à 250 g.
Quelle est la probabilité pour un fromage d'être éliminé ?

---

4. Les êtres humains sont répartis, suivant la composition du sang, en quatre groupes : O, A, B, AB.
Dans une assemblée de 10 donneurs de sang, 4 personnes appartiennent au groupe O, 3 personnes au groupe A, 2 au groupe B et une au groupe AB.
On choisit au hasard 3 personnes de l'assemblée. Déterminer :

a. la probabilité que les 3 personnes appartiennent au même groupe sanguin ;

b. la probabilité que deux d'entre elles au moins appartiennent au même groupe sanguin ;

c. la probabilité que les 3 personnes appartiennent à 3 groupes différents.

EXERCICES DE PROBABILITÉS

5. Un petit magasin emploie trois personnes ; la probabilité pour que l'une quelconque d'entre elles soit absente est de 0,05.
On suppose que les trois personnes s'absentent indépendamment les unes des autres.

a. Quelle est la probabilité pour qu'aucun des employés ne manque ?

b. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait k employés absents (k compris entre 1 et 3) ?

---

6. Une classe de vingt-cinq élèves est composée de quinze filles et de dix garçons. Pour représenter cette classe lors d'une cérémonie, on compose une délégation de trois élèves par tirage au sort parmi les élèves de la classe : on suppose l'équiprobabilité de chaque tirage.

1. Quel est le nombre de délégations possibles ?

2. Déterminer la probabilité pour qu'un élève donné (désigné par A) fasse partie de la délégation.

3. Déterminer la probabilité pour que l'un au moins de deux élèves donnés (désignés par A et B) fasse partie de la délégation.

4. Soit X la variable aléatoire qui, à tout tirage au sort d'une délégation, associe le nombre de filles en faisant partie. Déterminer la loi de probabilité de X.

5. Une telle cérémonie se reproduit chaque trimestre de l'année scolaire et nécessite chaque fois un nouveau tirage au sort. Donner la probabilité pour que l'élève A soit choisi une fois, et une fois seulement, dans l'année scolaire.

---

7. Un touriste revient de vacances avec 15 films : deux tournés en Italie, cinq en Yougoslavie, huit en Grèce, mais aucune indication ne permet de distinguer les films. Il décide de n'en faire développer que onze. Quelle est la probabilité pour que, parmi les onze films développés il y ait :

a. tous les films de Grèce ?

b. aucun film d'Italie ?

c. autant de films de Yougoslavie que de Grèce ?

d. deux fois plus de films de Yougoslavie que d'Italie ?

---

8. **1.** Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)^5}$.

2. Une urne contient n boules blanches et une rouge. On tire au hasard, successivement et avec remise, cinq boules de l'urne.

a. Calculer, en fonction de n, la probabilité $p(n)$ d'obtenir pour la première fois la boule rouge au cinquième tirage.

b. Montrer qu'il existe une valeur de n unique telle que la probabilité $p(n)$ soit maximale. Calculer ce maximum.

---

9. Un marchand d'appareils ménagers vend le même jour quatre réfrigérateurs identiques garantis pour cinq ans. La probabilité pour qu'un réfrigérateur de ce type n'ait pas de panne pendant la période de garantie est 0,9. Calculer les probabilités :

a. pour que ces quatre réfrigérateurs n'aient pas de panne pendant la période de garantie,

b. pour que deux réfrigérateurs et deux seulement tombent en panne pendant la période de garantie.

---

10. Les 100 billets d'une petite tombola sont tous vendus 5 F. L'organisateur hésite entre

a. offrir un lot unique d'une valeur de 300 F,

b. offrir 50 lots d'une valeur de 6 F.

Dans chacun des deux cas, calculer l'espérance mathématique de gain pour l'acheteur d'un billet. (on appelle « gain » la différence entre la somme remportée et la mise initiale).

Contactez nous sur facadm16@gmail.com à votre service inchallah

EXERCICES DE PROBABILITÉS

11. Une urne contient huit boules indiscernables au toucher dont trois sont blanches et cinq sont noires. On extrait de l'urne, une par une, quatre boules que l'on pose, dans l'ordre où elles sont tirées, dans quatre cases numérotées de 1 à 4.

1. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : les quatre cases sont occupées par des boules noires ;

B : les cases numérotées 1 et 2 sont occupées par des boules noires et les cases numérotées 3 et 4 sont occupées par des boules blanches ;

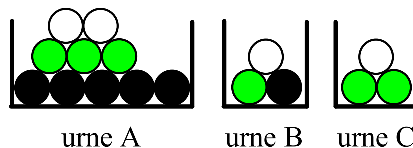
C : trois des cases sont occupées par des boules blanches.

2. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus petit des numéros de cases occupées par une boule noire (par exemple, si l'on a posé dans les cases 1, 2, 3 et 4 respectivement une boule blanche, une boule noire, une boule noire et une boule blanche, X prend la valeur 2). Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

Note : On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

---

12. Trois urnes A, B et C contiennent des boules blanches, noires et vertes.
La répartition initiale des boules est celle-ci :



urne A urne B urne C

On tire des boules une à une, sans remise et en appliquant les règles suivantes :

- On commence par tirer dans l'urne A ;
- après tirage d'une boule noire, tirer dans l'urne B;
- après tirage d'une boule blanche, tirer dans l'urne C ;
- après tirage d'une boule verte, s'arrêter.

Déterminer les probabilités de tirer :

***a*.** exactement 3 boules,

***b*.** au moins 4 boules,

***c*.** au plus 2 boules.

Indication : représenter l'enchaînement des tirages par un arbre.

---

13. On appelle « dé de 6 » un dé cubique à 6 faces carrées, numérotées de 1 à 6, non pipé.
On appelle « dé de 20 » un dé icosaédrique à 20 faces triangulaires numérotées de 1 à 20, non pipé.
Sam et Vik sont les héros d'un jeu de rôle. Ils mènent un combat contre un monstre des abysses, dont l'issue dépend du jet de deux dés, un de 20 et un de 6, dont les résultats sont indépendants.

Sam gagne son combat s'il obtient à la fois :
- un nombre inférieur ou égal à 12 au dé de 20 ;
- un nombre strictement supérieur à 2 au dé de 6.

Vik perd son combat s'il obtient à la fois :
- un nombre strictement compris entre 3 et 17 au dé de 20 ;
- un nombre autre que 1 au dé de 6.

1. Quelle est la probabilité p pour que Sam gagne et la probabilité v pour que Vik gagne ?

2. Sam combat le monstre quatre fois de suite.
Quelle est la probabilité p_4 pour qu'il gagne au moins une fois ?

3. Sam combat le monstre n fois de suite.

***a*.** Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n pour qu'il gagne au moins une fois.

***b*.** Pour quelle valeur minimale de n la probabilité p_n est-elle supérieure ou égale à 0,9 ?

Contactez nous sur facadm16@gmail.com à votre service inchallah

EXERCICES DE PROBABILITÉS

14. Deux grossistes produisent des bulbes de tulipes :
- le premier, des bulbes à fleurs rouges dont 90% donnent une fleur,
- le second, des bulbes à fleurs jaunes dont 80% donnent une fleur.

Un horticulteur achète 70% des bulbes qu'il cultive au premier grossiste et le reste au second.
Un bulbe de tulipe donne au plus une fleur.
L'horticulteur plante un bulbe pris au hasard.

On notera :
G_1 l'événement « le bulbe provient du premier grossiste ».
G_2 l'événement « le bulbe provient du second grossiste ».
F l'événement « le bulbe donne une fleur ».

Déterminer les probabilités des événements suivants :

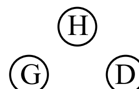
a. Obtenir une fleur rouge.

b. Obtenir une fleur jaune.

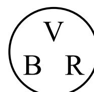
c. Ne pas obtenir de fleur.

---

15. Le matériel d'un jeu de triboulet se compose de :
- trois boules : une bleue, une rouge, une verte, notées respectivement B, R, V,
- une cuvette comportant trois trous disposés comme sur la figure ci-dessous, appelés :
  haut (H), gauche (G) et droit (D) :



Le banquier lance les trois boules. Celles-ci s'immobilisent en tombant chacune dans un trou. Elles forment ainsi une configuration. La configuration dans laquelle la boule verte est tombée dans le trou du haut, la bleue dans le trou gauche et la rouge dans le trou droit est notée :



1. ***a.*** Ecrire toutes les configurations possibles.

b. On suppose que toutes les configurations sont équiprobables. Quelle est la probabilité de chacune d'elles ?

2. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
E_1 : La boule verte est tombée dans le trou du haut.
E_2 : La boule bleue est tombée dans le trou droit.
E_3 : La boule verte est tombée dans le trou du haut et la bleue dans le trou droit.
E_4 : La boule bleue n'est pas tombée dans le trou du haut.

3. Calculer la probabilité de l'événement E_2 sachant E_1. E_1 et E_2 sont-ils indépendants ?

4. On décide de jouer une partie en 5 lancers. Un joueur parie à chaque lancer que la boule verte tombe dans le trou du haut. Quelle est la probabilité de l'événement : « Il gagne exactement deux fois » ? On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible. (On suppose que le résultat d'un lancer est indépendant des résultats des autres lancers.)

---

16. On extrait d'un jeu de cartes les 7, 8 et 9 de cœur, les 7 et 8 de pique et le 7 de trèfle.
On obtient ainsi un paquet de six cartes. De ce paquet on va tirer successivement plusieurs cartes ; lorsque l'on emploiera l'expression « avec remise » on indiquera que, une carte ayant été tirée, cette carte est réintroduite au hasard dans le paquet avant que l'on ne procède au tirage suivant.

1. On tire successivement trois cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre le 7 de trèfle, le 8 de pique et le 9 de cœur :

a. lorsque le tirage se fait avec remise ?

b. lorsque le tirage se fait sans remise ?

EXERCICES DE PROBABILITÉS

2. On tire simultanément trois cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a. le 7 de trèfle, le 8 de pique et le 9 de cœur ?

b. un 7, un 8 et un 9 ?

3. On tire successivement trois cartes au hasard, sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir un 7, un 8 et un 9 :

a. Dans cet ordre ?

b. Dans un ordre différent ?

---

17. On dispose de deux dés tétraédriques, l'un bleu, l'autre rouge. Les quatre faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 4.
Lorsqu'on jette un dé, on suppose qu'il ne peut pas retomber sur une arête ou un sommet et on note le numéro de la face non visible.
Pour le dé bleu, les quatre numéros ont tous la même probabilité d'être obtenus.
Pour le dé rouge, la probabilité p_i d'obtenir le numéro i est proportionnelle à i, c'est-à-dire :

$$\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4}.$$

1. Calculer la probabilité d'obtenir chacun des quatre numéros pour le dé rouge.

2. L'épreuve élémentaire consiste à jeter les deux dés simultanément et à noter les deux résultats. Soit X la variable aléatoire définie par la somme des deux résultats.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. On répète l'épreuve six fois. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre fois une somme égale à 5 ?

---

18. Un constructeur automobile achète des pneus à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20 % au premier fournisseur, 50 % au second fournisseur, 30 % au troisième fournisseur.
Le premier fournisseur fabrique 90 % de pneus sans défaut, le second fournisseur fabrique 95 % de pneus sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 80 % de pneus sans défaut.
On note F_1 l'événement « Le pneu provient du premier fournisseur », F_2 l'événement « Le pneu provient du second fournisseur » et F_3 l'événement « Le pneu provient du troisième fournisseur ».

1. On choisit un pneu au hasard dans la livraison. On note S l'événement « Le pneu est sans défaut ».

a. Calculer la probabilité $p(S)$ que le pneu soit sans défaut.

b. Le pneu choisi étant sans défaut, quelle est la probabilité $p_S(F_1)$ qu'il provienne du premier fournisseur ? Donner la valeur exacte et une valeur approchée, à 10^{-3} près, de $p_S(F_1)$.

2. On suppose que la probabilité qu'un pneu monté soit sans défaut est de 0,895.
Calculer la probabilité R que, sur un lot de 12 pneus montés, un pneu au plus soit défectueux.
On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de R.

3. La durée de vie en km d'un pneu est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre : $\lambda = \frac{1}{50\,000} = 2 \times 10^{-5}$.

Selon cette loi, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, on a : $p(T \leqslant x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

a. Quelle est la probabilité p_1 qu'un pneu dure moins de 50 000 km ? Donner la valeur exacte de p_1.

b. Quelle est la probabilité p_2 qu'un pneu dure plus de 50 000 km ? Donner la valeur exacte de p_2.

c. Quelle est la probabilité p_3 qu'un pneu dure plus de 50 000 km, sachant qu'il a déjà duré 25 000 km ? Donner la valeur exacte de p_3.

EXERCICES DE PROBABILITÉS

19. ***Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.***
Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 5 ‰ (5 pour mille) de ce cheptel.

1. On choisit, au hasard, n bovins du cheptel et l'on désigne par X la variable aléatoire définie par le nombre de malades parmi les n animaux.

a. Si $n=10$, calculer à 10^{-3} près les probabilités suivantes : $p(X=0)$, $p(X \geqslant 1)$.

b. Déterminer n pour que l'espérance mathématique de X soit égale à 0,10.

2. Des études statistiques ont montré que la probabilité pour un animal d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8 et que celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est 0,9.
On note :
T l'événement « avoir un test positif »,
M l'événement « être malade »,

a. Calculer la probabilité pour un animal d'avoir un test positif à cette maladie.

b. Calculer la probabilité qu'un animal soit malade sachant que son test est positif.
(On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.)

---

20. Un concours de tir met aux prises deux équipes de deux joueurs. Chaque joueur de chaque équipe peut marquer 0, 1 ou 2 points avec les probabilités suivantes :

Equipe jaune :

	0	1	2
Joueur A	0,4	0,4	0,2
Joueur B	0,3	0,4	0,3

Equipe verte :

	0	1	2
Joueur C	0,3	0,5	0,2
Joueur D	0,5	0,3	0,2

Les résultats des différents joueurs et des différentes équipes sont indépendants entre eux.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de points marqués par l'équipe jaune et soit Y la variable aléatoire égale au nombre de points marqués par l'équipe verte.

1. Déterminer la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires X et Y.

2. Calculer la probabilité de l'événement : il y a match nul.

---

21. Des observations météorologiques dans un lointain pays ont prouvé que s'il pleut un certain jour, la probabilité pour qu'il pleuve le lendemain est égale à $\frac{2}{3}$, alors que s'il fait beau un certain jour, la probabilité pour qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{3}{4}$. On admet qu'il n'existe que deux types de temps (il pleut ou il fait beau). On numérote les jours à partir de 1 et on s'intéresse à l'évolution de la probabilité pour qu'il fasse beau au fil des jours.

1. On suppose que la probabilité pour qu'il fasse beau le premier jour est égale à $\frac{1}{3}$.
Quelle est la probabilité pour qu'il fasse beau le deuxième jour ? Quelle est la probabilité pour qu'il fasse beau le troisième jour ? (Utiliser un arbre)

2. On appelle p_n la probabilité pour qu'il fasse beau le $n^{\text{ième}}$ jour. Montrer, en utilisant un arbre, que : $p_{n+1} = \frac{5}{12} p_n + \frac{1}{3}$.

3. Vérifier qu'il existe une unique valeur de p_1 telle que la suite des probabilités p_n soit constante.

4. On suppose que le nombre p_1 est différent de $\frac{4}{7}$ et on pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = p_n - \frac{4}{7}$.
Trouver une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n et en déduire la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

EXERCICES DE PROBABILITÉS

22. **1.** Une entreprise cherche à pourvoir DEUX postes de travail. Ces deux emplois peuvent être indifféremment occupés par un homme ou une femme. QUATRE hommes et DEUX femmes posent leurs candidatures.
Quelles sont les probabilités pour que ces postes soient occupés :
a. par deux femmes ;
b. par deux hommes ;
c. par deux personnes de même sexe ;
d. par deux personnes de sexes différents ?

2. Une autre entreprise cherche à pourvoir TROIS postes de travail qui peuvent être indifféremment occupés par un homme ou une femme. Trente candidats se sont présentés, à raison de dix pour chacun des postes. On constate alors que pour chaque poste il y a SIX hommes et QUATRE femmes qui ont posé leur candidature.
Calculer la probabilité pour que, parmi ces trois postes, deux exactement soient occupés par une femme.

---

23. On rapporte le plan à un repère orthonormal d'origine O (unité graphique : 3 cm). On considère les points I(1 ; 0), J(0 ; 1) et on construit le carré (O, I, K, J).

1. On considère les fonctions f et g définies sur [0 ; 1] par
$$f(x) = x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x}\,.$$
Construire les courbes représentatives C_f et C_g des fonctions f et g. On ne demande pas l'étude des fonctions.
Les courbes C_f et C_g déterminent dans le carré (O, I, K, J) trois régions :
- la région délimitée par les segments [OI], [IK] et la courbe C_f, notée D_1 ;
- la région comprise entre les courbes C_f et C_g, notée D_2 ;
- la région comprise entre les segments [OJ], [JK] et la courbe C_g, notée D_3.

Calculer, en cm^2 les aires de ces trois régions.

2. Le carré (O, I, K, J) sert de cible à un jeu de fléchettes. Pierre lance une fléchette. La probabilité pour qu'il atteigne la cible est 0,6. On admet que les probabilités d'atteindre les régions D_1, D_2, D_3 sont proportionnelles aux aires, exprimées en cm^2, de ces trois domaines.
a. Calculer la probabilité pour que Pierre rate la cible.
b. Calculer les probabilités pour que Pierre atteigne D_1, D_2 et D_3.

3. Pierre marque un point s'il atteint D_1, 3 points s'il atteint D_2, 2 points s'il atteint D_3, 0 point s'il rate la cible.
Il lance deux fléchettes successivement et dans les mêmes conditions.
a. Quelle est la probabilité pour qu'il marque au moins 1 point ?
b. Quelle est la probabilité pour qu'il marque exactement 3 points ?

---

24. **1.** Dans une ville où la génération des 20 ans comprend 1 200 personnes, on a dénombré 300 bacheliers.
Un institut effectue, dans cette ville, un sondage auprès d'un échantillon de cette génération.

a. Quelle est la probabilité qu'il y ait parmi 8 personnes interrogées, 2 bacheliers exactement ?

b. Calculer le nombre minimal n de personnes à interroger pour que la probabilité de trouver au moins un bachelier soit supérieure ou égale à 0,95.

2. Une assemblée est composée de 20 individus dont 5 bacheliers.
On choisit un échantillon de 8 personnes. Tous les échantillons de 8 personnes ont la même probabilité d'être choisis.
Quelle est la probabilité pour que l'échantillon soit représentatif de l'assemblée, c'est-à-dire qu'il comprenne 2 bacheliers et 6 non bacheliers ?

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près par défaut.

EXERCICES DE PROBABILITÉS

25. Un joueur dispose d'un dé à six faces : trois sont blanches, deux sont vertes et une est rouge. Lors du lancer du dé, chaque face a la même probabilité d'apparition.
Le joueur lance le dé et observe la couleur de la face supérieure :
- s'il observe une face rouge, il gagne 2 € ;
- s'il observe une face verte, il perd 1 € ;
- s'il observe une face blanche, il relance le dé et :
    - pour une face rouge, il gagne 3 € ;
    - pour une face verte, il perd 1 € ;
    - pour une face blanche, le jeu est arrêté sans gain ni perte.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de ce joueur.

a. Réaliser un arbre probabiliste.
Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

---

26. Un joueur tire cinq cartes au hasard et simultanément d'un jeu de trente-deux cartes.

1. Quelle est la probabilité pour que ce joueur tire cinq piques ?
Plus généralement quelle est la probabilité pour qu'il tire une « couleur », c'est-à-dire cinq cartes de la même couleur (on rappelle qu'il y a quatre couleurs : cœur, pique, carreau et trèfle) ?

2. Quelle est la probabilité pour que ce joueur tire les quatre as parmi ses cinq cartes ?
Plus généralement quelle est la probabilité pour que ce joueur tire un « carré », c'est-à-dire quatre cartes de même « hauteur » parmi les cinq ?

3. Calculer la probabilité pour que ce joueur tire un « full » aux as par les rois (c'est-à-dire trois as et deux rois), puis la probabilité pour qu'il tire un full (c'est-à-dire un brelan - trois cartes de même hauteur - et une paire - deux cartes de même hauteur).

N.B. : On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles, en indiquant une approximation décimale.

---

27. Un dispositif électronique permet d'obtenir au hasard un entier naturel x compris, au sens large, entre 1 et 999 (on est donc dans une situation d'équiprobabilité). Tout nombre compris entre 10 et 99 est écrit avec deux chiffres, et tout nombre compris entre 1 et 9 est écrit avec un seul chiffre ; ainsi, à titre d'exemple, le nombre soixante-deux sera affiché 62 et non 062, de même le nombre sept s'écrira 7 et non 007.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
E_1 : x est un multiple de cinq.
E_2 : x s'écrit sans utiliser plus d'une fois le même chiffre.
E_3 : x s'écrit en utilisant au moins deux fois le même chiffre.

2. On détermine ainsi successivement cinq nombres.
Calculer la probabilité pour que, parmi ces cinq nombres, trois exactement soient des multiples de cinq.

N.B. : On donnera l'approximation décimale des résultats à 10^{-3} près par défaut.

EXERCICES DE PROBABILITÉS

28. Un candidat se présente à un jeu radiophonique ; il doit répondre par vrai ou faux à une série de quatre questions de difficulté croissante. Les questions sont indépendantes et numérotées de 1 à 4. Chaque question comporte trois affirmations dont une seule est vraie.
En supposant que le candidat réponde au hasard à chaque question, déterminer les probabilités suivantes :

1. le candidat répond correctement à la 1ère question.

2. le candidat répond correctement aux quatre questions.

3. le candidat répond correctement à deux questions exactement.

4. Sachant que le candidat gagne :
10 euros s'il répond correctement à la 1ère question,
20 euros s'il répond correctement à la 2ème question,
40 euros s'il répond correctement à la 3ème question,
80 euros s'il répond correctement à la 4ème question,
et que toute mauvaise réponse lui fait perdre 20 euros, déterminer la probabilité pour que le candidat gagne au moins 80 euros à l'issue des quatre questions.

---

29. On dispose devant un enfant une boîte où l'on a placé 6 cartons indiscernables au toucher sur lesquels sont écrites les 6 lettres de son prénom CLAUDE.

1. On demande à l'enfant de tirer successivement 4 cartons de la boîte et de les aligner devant lui dans l'ordre de sortie pour former un « mot » . (On appelle « mot » toute suite de quatre lettres).
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a. A : « Il a forme un mot commençant par son initiale C ».

b. B : « Il a formé le prénom de sa soeur Luce ".

N.B. : On donnera ces résultats sous forme de fractions irréductibles.

2. L'enfant répète 8 fois la même expérience (aligner 4 cartons). Quelle est la probabilité pour qu'il ait obtenu :

a. Quatre fois exactement un mot commençant par C ?

b. Au moins une fois un mot commençant par C ?

N.B. : On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de ces résultats.

---

30. Quatre amateurs d'astrologie se rencontrent. Chacun donne son signe du zodiaque (il y en a 12), on note (s_1, s_2, s_3, s_4) le résultat.

1. Quelle est la probabilité pour qu'ils aient tous des signes différents ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux d'entre eux soient du même signe ?

2. L'aînée de ces quatre personnes est de la Balance, quelle est la probabilité pour qu'au moins une des trois autres soit du même signe que l'aînée ?

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

EXERCICES DE PROBABILITÉS

31. Une machine M est constituée de deux éléments A et B. La défectuosité d'un seul élément suffit à mettre hors service la machine et on exclut toute autre éventualité de panne. Les avaries éventuelles relatives aux éléments A et B sont deux événements indépendants de probabilités respectives : $a = 0{,}1$ et $b = 0{,}2$.

1. Calculer la probabilité pour que les deux éléments soient hors service en même temps. Justifier clairement votre réponse.
2. Calculer la probabilité pour que la machine soit hors service.
3. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments hors service. Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance mathématique de X.
4. Si la machine est en panne, quelle est la probabilité d'avoir un élément et un seul hors service ?
5. On dispose maintenant de n machines identiques à M.
   Déterminer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'au moins une machine soit en état de marche. Quelle est la plus petite valeur de n telle que $p_n > 0{,}99$?

---

32. Alain et Bernard jouent au jeu suivant :
On lance deux pièces simultanément. Si on obtient 2 faces Alain a gagné ; si on obtient 2 piles c'est Bernard qui a gagné ; enfin si on obtient pile et face on recommence.
Pour chacune des deux pièces, les probabilités d'obtenir pile, ou d'obtenir face, sont égales.

1. On note A_1 la probabilité pour Alain de gagner au premier tour. On note B_1 la probabilité pour Bernard de gagner au premier tour. On note C_1 la probabilité pour que la partie continue.
   Calculer A_1, B_1 et C_1.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n et B_n les probabilités pour Alain et Bernard de gagner exactement au $n^{\text{ième}}$ tour. De même on note C_n la probabilité pour que la partie continue après le $n^{\text{ième}}$ tour.
   Calculer A_n , B_n et C_n , en fonction de n.
3. Calculer les probabilités P_n et Q_n pour Alain et Bernard de gagner au cours des n premiers tours.
   Que vaut la somme $P_n + Q_n + C_n$? Expliquer ce résultat.
4. Calculer enfin les limites de P_n , Q_n et C_n lorsque $n \to +\infty$.

---

33. On considère une urne contenant trois boules identiques numérotées 1, 2 et 3. Trois tirages successifs avec remise sont effectués et l'on appelle a, b et c les trois numéros ainsi obtenus ; tous les tirages sont équiprobables.

1. Soit X la variable aléatoire réelle égale à la somme $a + b$.
   Etudier la loi de probabilité de X.
2. Soit Y la variable aléatoire réelle égale à $2c$.
   Calculer la probabilité de l'événement $X = Y$.
3. On considère la variable aléatoire Z définie par :
   si $X = Y$, alors $Z = -2$;
   si $X > Y$, alors $Z = -1$;
   si $X < Y$, alors $Z = +3$.
   Donner la loi de probabilité de Z. Quelle est l'espérance mathématique de Z ?

EXERCICES DE PROBABILITÉS

34. Cet exercice porte sur une application du Calcul des Probabilités à la Biologie. Il ne présuppose aucune connaissance spécifique de Biologie.
On veut fabriquer un ARN de synthèse en utilisant un mélange composé de 40 % d'adénine (notée « A » dans ce qui suit), de 20 % d'uracile (notée « U »), de 20 % de guanine (notée « G ») et de 20 % de cytosine (notée « C »).
L'adénine, l'uracile, la guanine et la cytosine s'organisent de façon aléatoire en chaînes de codons désignés par des triplets : ainsi (G, A, U) désigne le codon incorporant dans cet ordre la guanine, l'adénine et l'uracile. On suppose que lors de la synthèse :
- la probabilité de l'incorporation d'un nucléotide A, U, G, C dans un codon est donnée par le pourcentage de ce nucléotide dans le mélange ;
- les incorporations de nucléotides sont des événements indépendants.

1. Vérifier que la probabilité d'obtenir le codon (A, C, A) est 0,032. Quelle est la probabilité d'obtenir la chaîne ordonnée suivante de codons :
(A,C,A), (G,A,A), (A,A,U), (A,A,G), (C,A,A), (A,U,A), (A,G,A), (A,A,C), (U,A,A)
dans laquelle les codons apparaissent de façon indépendante ?

2. Dénombrer successivement :
- les codons contenant trois éléments d'adénine ;
- les codons contenant deux éléments d'adénine ;
- les codons contenant un élément d'adénine ;
- les codons ne contenant aucun élément d'adénine.

Quelle est la probabilité d'obtenir un codon contenant deux éléments et seulement deux éléments d'adénine ?

3. On considère l'aléa numérique X défini par X = « nombre d'éléments d'adénine d'un codon ». Déterminer la loi de probabilité de X.

---

35. Un jeu de cartes comporte vingt cartes : « as », « roi », « dame », « valet », et « dix » dans chacune des quatre couleurs : pique, cœur, carreau, trèfle. A chaque tirage, on extrait au hasard simultanément deux cartes de ce jeu. X est l'aléa numérique qui, à chaque tirage, associe la somme des points obtenus en comptant 4 points pour chaque as et chaque roi, et (-2) points pour chaque pique présent dans les deux cartes extraites ; les autres cartes valent 0 point.
Par exemple le roi de pique compte pour $4 - 2 = 2$, la dame de pique vaut $0 - 2 = -2$.

1. Déterminer la loi de probabilité de l'aléa numérique X.

2. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

3. En effectuant un tirage, l'aléa numérique X prend une valeur négative ou nulle. Calculer alors la probabilité pour que les deux cartes extraites soient deux piques.

---

36. Monsieur M est chargé de ventes à domicile pour le bénéfice d'une association. A chaque personne sollicitée, il propose l'achat d'un livre seul, ou d'une cassette seule, ou l'achat d'un livre et d'une cassette.
Après un premier bilan de son activité, monsieur M estime que la probabilité qu'une personne visitée choisie au hasard achète un livre (événement L) est 0,2, la probabilité qu'elle achète une cassette (événement C) est 0,1 et la probabilité qu'elle n'achète rien (événement R) est 0,75.

Partie A

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
D : « La personne visitée achète un livre ou une cassette ».
E : « La personne visitée achète un livre et une cassette ».
F : « La personne visitée achète seulement un livre ».
G : « La personne visitée achète seulement une cassette ».

2. Sachant que la personne visitée a acheté un livre, quelle est la probabilité qu'elle ait acheté aussi une cassette ?

Partie B

Monsieur M se présente successivement chez n personnes choisies au hasard. Calculer la probabilité p_n qu'une personne au moins lui achète un livre ou une cassette. Comment faut-il choisir l'entier naturel n pour avoir $p_n > 0,9$?

EXERCICES DE PROBABILITÉS

37. Quatre filles et trois garçons doivent subir l'épreuve orale d'un examen. L'examinateur décide d'établir au hasard la liste fixant l'ordre de passage des candidats. Pour cela, il met les noms (supposés tous différents) des sept candidats dans une enveloppe.

1. Dans cette question, on suppose que l'examinateur procède à un tirage des sept noms l'un après l'autre.
On désigne par F_1 l'événement. « Le premier candidat interrogé est une fille », et par F_2 l'événement : « le deuxième candidat interrogé est une fille ».

a. Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille sachant que le premier candidat interrogé est un garçon ?

b. Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille sachant que le premier candidat interrogé est une fille ?

c. Quelle est la probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une fille ?

2. On suppose maintenant que l'examinateur, voulant interroger seulement quatre candidats parmi les 7, procède à un tirage simultané de quatre noms. On donne X la variable aléatoire égale au nombre de filles ainsi désignées.

a. Quelle est la loi de probabilité de X ?

b. Calculer l'espérance de X.

---

38. ***Dans cet exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.***
On dispose d'un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 parfaitement équilibré et de deux urnes :
- une urne U_1 contenant 8 boules blanches et 2 boules noires.
- une urne U_2 contenant 3 boules noires et 7 boules rouges.
Les questions **1** et **2** sont indépendantes.

1. On lance le dé une fois.
Si le numéro obtenu est 6, on tire une boule dans U_1 et on note sa couleur.
Si ce numéro n'est pas 6, on tire une boule dans U_2 et on note sa couleur.

a. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

b. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?

c. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire ?

2. On tire maintenant une boule dans U_1. On note sa couleur puis on remet cette boule dans l'urne. On effectue cette épreuve en tout quatre fois de suite. Quelle est la probabilité pour qu'au cours de ces quatre tirages :

a. on ne tire aucune boule blanche ?

b. on tire exactement une boule blanche ?

c. on tire au moins une boule blanche ?

---

39. Des enquêtes concernant les véhicules circulant en France ont été effectuées. Elles ont montré que
- 12 % des véhicules ont des freins défectueux ;
- parmi les véhicules ayant des freins défectueux, 20 % ont un éclairage défectueux ;
- parmi les véhicules ayant de bons freins, 8 % ont un éclairage défectueux.

Dans l'espoir d'améliorer la sécurité routière, la gendarmerie effectue, au hasard, des contrôles de véhicules.
On appelle E l'événement : « le véhicule contrôlé a un bon éclairage », F l'événement : « le véhicule contrôlé a de bons freins ».
On donnera, pour chaque résultat, l'approximation décimale par défaut à 10^{-4} près.

1. Donner les probabilités de F, de $\overline{E}$ sachant que $\overline{F}$ est réalisé, puis de $\overline{E}$ sachant que F est réalisé.

2. ***a.*** Calculer la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait des freins défectueux et un éclairage défectueux.

   b. Calculer la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait de bons freins et un éclairage défectueux.

   c. En déduire la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait un éclairage défectueux.

3. Sachant qu'un véhicule contrôlé a un éclairage défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il ait des freins défectueux ?

4. ***a.*** Montrer que la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé soit en bon état (c'est-à-dire ait de bons freins et un bon éclairage) est 0,8096.

   b. Au cours d'un contrôle, les gendarmes ont arrêté 20 véhicules. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait, parmi ces véhicules, au moins un véhicule qui ne soit pas en bon état ?

---

40. On considère le jeu suivant :
Un joueur dispose de trois disques équilibrés :
– le premier disque a une face bleue et une face rouge ;
– le deuxième disque a une face bleue et une face jaune ;
– le troisième disque a une face bleue et une face verte.
Les trois disques sont lancés simultanément de telle sorte qu'ils ne se recouvrent jamais. On compte le nombre de couleurs visibles à l'issue de ce lancer.

1. On note A, B, C les événements suivants :
   A : « il apparaît une seule couleur »
   B : « il apparaît deux couleurs »
   C : « il apparaît trois couleurs »
   Calculer les probabilités de A, B et C.

2. Le joueur gagne 10 euros s'il apparaît une seule couleur, 5 euros s'il apparaît deux couleurs et rien s'il apparaît trois couleurs.
   On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer son espérance mathématique.

3. Un joueur joue deux fois de suite. On note Y la variable aléatoire représentant le gain du joueur sur l'ensemble des deux parties. Déterminer sa loi de probabilité et son espérance mathématique.

---

41. Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Partie A - Dans une urne U_1 on a placé 4 jetons portant le nombre 100 et 3 jetons portant le nombre 200. On extrait simultanément au hasard 3 jetons de U_1 et on note la somme des nombres inscrits sur ces 3 jetons.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir une somme égale à 400 vaut $\dfrac{18}{35}$.

2. Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage de 3 jetons la somme obtenue.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

Partie B - On considère l'urne U_1 de la première question et une autre urne U_2 contenant 3 jetons marqués 100 et 2 jetons marqués 200. Un tirage consiste à extraire un jeton de U_1 puis un jeton de U_2.

1. Calculer la probabilité d'obtenir 2 jetons portant le même nombre.

2. En déduire la probabilité pour que la somme des nombres tirés soit égale à 300.

3. Calculer la probabilité d'avoir extrait de U_1 un jeton marqué 100 sachant qu'on a obtenu une somme égale à 300.

EXERCICES DE PROBABILITÉS

42. Une boîte contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et n boules jaunes, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Calculer, en fonction de n, les probabilités $p(\text{A})$ et $p(\text{B})$ des événements :
A : « obtenir 2 boules de même couleur » ;
B : « obtenir 2 boules de couleurs différentes ».

2. On suppose que la probabilité d'obtenir deux boules jaunes vaut $\frac{3}{13}$. Déterminer n puis $p(\text{A})$ et $p(\text{B})$.

3. Dans cette question n vaut 7.
On répète 10 fois l'expérience en remettant dans la boîte, après chaque tirage, les deux boules tirées. Soit X le nombre de fois où l'événement A est réalisé au cours de ces 10 répétitions.
Déterminer la loi de probabilité de X.

---

43. Dans cet exercice, les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions.
On dispose de trois dés à 6 faces, parfaitement équilibrés. Sur le premier, 2 faces sont bleues ; sur le deuxième, 3 faces sont bleues ; sur le troisième, 5 faces sont bleues ; les autres faces sont rouges.

1. Dans un premier temps, on considère le premier dé. On le lance 5 fois de suite, les lancers sont indépendants.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une face rouge dans cet ordre ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir quatre fois une face bleue et une face rouge ?

c. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une face bleue ?

2. On considère maintenant les trois dés.

a. On prend au hasard et de façon équiprobable l'un des trois dés et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir une face bleue ?

b. Quelle est la probabilité d'avoir lancé le troisième dé sachant que l'on a obtenu une face bleue ?

---

44. Des pièces mécaniques sont fabriquées en grande série sur une chaîne ; on estime que 99 % des pièces sont bonnes. Sur chaque pièce on effectue un test de qualité.
Lorsque la pièce est bonne, le test le confirme avec une probabilité de 0,995 et déclare donc quelle est mauvaise avec une probabilité de 0,005.
Lorsque la pièce est mauvaise, le test le confirme avec une probabilité de 0,990 et déclare donc qu'elle est bonne avec une probabilité de 0,010.
On note :
B : l'événement « la pièce est bonne ».
T : l'événement « le test indique que la pièce est bonne ».
Les résultats des questions suivantes seront donnés à 10^{-3} près par défaut.

1. ***a.*** Réaliser un arbre probabiliste.

b. Déterminer la probabilité de $\overline{\text{T}}$, puis celle de T.

2. On décide d'écarter de la vente toute pièce dont le test indique qu'elle est mauvaise.

a. Déterminer la probabilité pour qu'une pièce écartée de la vente soit bonne.

b. On tire au hasard successivement et avec remise 20 pièces parmi celles écartées de la vente. Calculer la probabilité de tirer au moins une bonne pièce.

EXERCICES DE PROBABILITÉS

45. Une urne contient 9 boules blanches et 1 boule rouge.

1. Au cours de l'expérience qui consiste à extraire simultanément 3 boules de l'urne, quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ? On suppose les boules indiscernables au toucher.

2. L'expérience précédente est répétée cinq fois de suite, avec remise à chaque fois dans l'urne des 3 boules que l'on a tirées.
Soit X le nombre de boules rouges obtenues au cours des cinq tirages.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

3. On extrait une première boule de l'urne et on ne l'y remet que si elle est rouge. On extrait ensuite une deuxième boule de l'urne. Quelle est la probabilité que cette deuxième boule soit rouge ?

---

46. Afin de déceler d'éventuels défauts, un laboratoire fabriquant des résistances chauffantes a mis au point deux contrôles C_1 et C_2.
Dans un lot R de 250 résistances, 185 ont subi le contrôle C_1, 170 ont subi le contrôle C_2, 110 ont subi les deux contrôles.

1. Représenter cette situation par un diagramme faisant notamment apparaître le nombre de résistances qui n'ont subi aucun contrôle.

2. On choisit au hasard une résistance dans le lot R. On a une situation d'équiprobabilité. Déterminer la probabilité des événements suivants :
A : « La résistance choisie n'a subi aucun contrôle ».
B : « La résistance choisie n'a subi que le contrôle C_1 ».
C : « La résistance choisie n'a subi que le contrôle C_2 ».

3. On associe à chaque tirage d'une résistance de R le nombre de contrôles qu'elle a subis ; cela définit une variable aléatoire X.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Donner la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique E(X). Que représente E(X) ?

---

47. A la suite de la découverte dans un pays A des premiers cas d'une maladie contagieuse non mortelle M, il a été procédé dans ce pays à une importante campagne de vaccination : 70 % des habitants de A ont été vaccinés. Une étude a révélé que 5 % des vaccinés ont été touchés à des degrés divers par la maladie, pourcentage qui s'est élevé à 60 % chez les non-vaccinés.

1. Calculer :

a. la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population ait été touché par cette maladie.

b. la probabilité pour qu'un individu ait été vacciné, sachant qu'il a été atteint par cette maladie.

2. Les séquelles laissées par cette maladie M sont variées mais on admet que 2 % des individus malades ont subi des lésions de la vue : on réalise une enquête sur n anciens malades d'un secteur donné. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus souffrant de lésion de la vue parmi eux. On supposera que la population du pays est suffisamment importante pour que X suive une loi binomiale.

a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n pour qu'au cours de cette enquête on découvre qu'il y a au moins une personne souffrant de lésions des yeux consécutives à cette maladie M.

b. Quelle est la plus petite des valeurs de n réalisant $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95$?

Contactez nous sur facadm16@gmail.com à votre service inchallah

Plus de cours sur: www.la-faculte.net merci pour votre visite

48. Une urne contient 9 boules (4 rouges, 2 bleues et 3 vertes) identiques au toucher. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne et on note leur couleur.
Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur (on donnera le résultat sous forme d'une fraction).

2. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ; puis on tire une seconde boule et on note sa couleur. Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur (on donnera le résultat sous forme d'une fraction).

3. On adopte la règle suivante : soit n un entier naturel non nul ; on gagne $10n$ euros si les deux boules tirées sont de la même couleur et on perd n^2 euros dans le cas contraire.
On désigne par X (respectivement Y) la variable aléatoire qui, à tout tirage de deux boules de l'urne selon le procédé décrit dans la première question (respectivement la deuxième question), associe le gain algébrique réalisé à l'issue du tirage.
Les variables aléatoires X et Y prennent donc les valeurs $10n$ et $-n^2$.

a. Déterminer les espérances mathématiques E(X) et E(Y) des variables aléatoires X et Y.

b. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n telles que $E(X) < 0 < E(Y)$.

---

49. Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ses faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1.
On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois et on les lance.
On note A l'événement : « Les deux dés tirés sont normaux ».
On note B l'événement : « Les deux faces supérieures sont numérotées 6 ».

1. ***a.*** Définir l'événement contraire de A, qu'on notera $\overline{A}$.

b. Calculer les probabilités de A et de $\overline{A}$.

2. ***a.*** Calculer $p_A(B)$, probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $p(B \cap A)$.

b. Calculer $p(B)$.

3. Calculer $p_B(A)$, probabilité de A sachant que B est réalisé.

---

50. Une urne contient deux boules blanches et quatre boules noires. Ces six boules sont indiscernables au toucher.

1. On effectue quatre tirages successifs d'une boule sans remise.

a. Calculer la probabilité de tirer dans l'ordre une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche.

b. Calculer la probabilité de tirer une seule boule blanche au cours de ces quatre tirages.

2. On effectue maintenant quatre tirages successifs d'une boule avec remise. Répondre aux mêmes questions qu'à la question **1**.

3. n étant un nombre entier strictement positif, on effectue n tirages successifs avec remise. On appelle P_n la probabilité d'obtenir au cours de ces n tirages une boule blanche uniquement au dernier tirage.

a. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_n.

b. Soit $S_n = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$. $(n > 1)$.
Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite de S_n.

Contactez nous sur facadm16@gmail.com à votre service inchallah

EXERCICES DE PROBABILITÉS

51. Juliette débute un jeu dans lequel elle a autant de chances de gagner que de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est 0,6 et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est 0,7.
On note, pour n entier naturel non nul :
G_n l'événement : « Juliette gagne la $n^{\text{ème}}$ partie »,
P_n l'événement : « Juliette perd la $n^{\text{ème}}$ partie ».

Partie A

1. Déterminer les probabilités $p(G_1)$, $p_{G_1}(G_2)$ et $p_{P_1}(G_2)$.

En déduire la probabilité $p(G_2)$.

2. Calculer $p(P_2)$.

Partie B

On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$.

1. Déterminer, pour n entier naturel non nul, les probabilités $p_{G_n}(P_{n+1})$ et $p_{P_n}(P_{n+1})$.

2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul : $\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$

3. Pour n entier naturel non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.

b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

4. ***a.*** Déduire du **3.**, l'expression de x_n en fonction de n.

b. Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

---

52. On considère le jeu suivant : une urne contient six boules blanches et une boule rouge. Le joueur tire successivement et sans remise une boule jusqu'à tirer la boule rouge.
On appelle k le rang du tirage de la boule rouge. On suppose que, à chaque tirage, chaque boule a autant de chances d'être tirée.
Le joueur gagne k euros si k est pair et perd k euros si k est impair. On définit la variable aléatoire X par le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer son espérance mathématique et sa variance.

3. Sachant que la première boule tirée est une boule blanche, quelle est la probabilité pour le joueur de gagner de l'argent ?

---

53. Dans une classe où tous les élèves étudient l'anglais, on a testé le caractère visuel ou auditif de chacun d'eux : 70 % sont des visuels et 30 % des auditifs.
On a noté que 50 % des visuels de cette classe ont de bonnes notes en anglais, et que 80 % des auditifs de cette même classe ont de bonnes notes en anglais.

1. Réaliser un arbre qui décrive cette situation.

2. On prend au hasard un nom sur la liste des élèves de cette classe.
Déterminer la probabilité des événements suivants :
E : « L'élève tiré est un visuel qui a de bonnes notes en anglais » ;
F : « L'élève tiré est un auditif qui a de bonnes notes en anglais » ;
G : « L'élève tiré a de bonnes notes en anglais ».

EXERCICES DE PROBABILITÉS

54. **1.** Soit a un nombre réel. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$ et par la condition initiale $u_1 = a$.

a. Soit (v_n) la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $v_n = 13u_n - 4$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.
Exprimer v_n en fonction de n et a.

b. Prouver que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de classe. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement : « le professeur oublie ses clés le jour n ».
Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E}_n$. On note a la probabilité p_1 qu'il oublie ses clés le premier jour. On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :
Si le jour n, il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie encore le jour suivant $n + 1$ est $\frac{1}{10}$.
Si le jour n, il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $n + 1$ est $\frac{4}{10}$.

a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n$. Pour cela, on réalisera un arbre probabiliste. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

b. A l'aide des résultats de la question **1.** donner l'expression de p_n en fonction de a et n. La limite p de p_n dépend-elle de la condition initiale a ?

---

55. **1.** Lors d'un concours d'équitation, un cavalier effectue un parcours de 1 500 m à la vitesse de 10 km/h et franchit sur ce parcours six obstacles indépendants les uns des autres. Pour ce cavalier, la probabilité de franchir « sans faute » un obstacle est $\frac{2}{3}$; le passage sans faute d'un obstacle ne ralentit pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'obstacles franchis sans faute.

a. Quelle est la nature de la loi de probabilité de X ?

b. Calculer l'espérance mathématique. En déduire la durée moyenne du parcours.

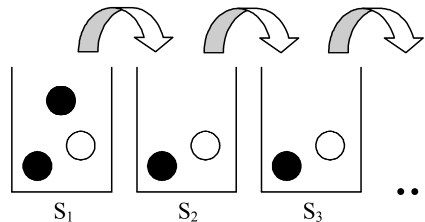
2. Ce cavalier doit ensuite effectuer à cheval deux sauts, indépendants l'un de l'autre. Pour chaque saut, il lui est attribué 0, 2 ou 5 points. La probabilité d'avoir 5 points est $\frac{2}{3}$, celle d'avoir 2 points est $\frac{1}{6}$, celle d'avoir 0 point est $\frac{1}{6}$.
On considère la variable aléatoire Y qui, aux deux sauts effectués, associe le nombre de points totalisés.

a. Quelles sont les valeurs prises par Y ? Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. En déduire l'espérance mathématique de Y et la probabilité de l'événement : $Y \geqslant 5$.

56. On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On imagine n sacs de jetons S_1, S_2, ..., S_n.
Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.
On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- Première étape : on tire au hasard un jeton de S_1.
- Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire, au hasard, un jeton de S_2.
- Troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire, au hasard, un jeton de S_3 ... et ainsi de suite ...



Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on note E_k l'événement : « le jeton sorti de S_k est blanc ».

1. ***a.*** Déterminer la probabilité de E_1 et les probabilités conditionnelles $p_{E_1}(E_2)$ et $p_{\overline{E_1}}(E_2)$.
En déduire la probabilité de E_2.

b. Pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité de E_k est notée p_k.
Justifier la relation de récurrence : $p_{k+1} = \frac{1}{3} p_k + \frac{1}{3}$.

2. Etude d'une suite (u_k)

On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier naturel k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $u_{k+1} = \frac{1}{3} u_k + \frac{1}{3}$.

a. On considère la suite (v_k) définie par : pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $v_k = u_k - \frac{1}{2}$.
Démontrer que (v_k) est une suite géométrique.

b. En déduire l'expression de u_k en fonction de k. Montrer que la suite (u_k) est convergente et préciser sa limite.

3. Dans cette question, on suppose que $n = 10$. Déterminer pour quelles valeurs de k on a :
$$0{,}4999 \leqslant p_k \leqslant 0{,}5.$$

---

57. Un sac contient 12 jetons : 5 sont blancs et 7 sont noirs. On suppose que chaque jeton a la même probabilité d'être tiré.

1. On tire simultanément 5 jetons du sac : soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

2. On tire successivement 5 jetons du sac en remettant à chaque tirage le jeton obtenu dans le sac. Soit Y le nombre de jetons blancs apparus.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de Y.

Plus de cours sur: www.la-faculte.net merci pour votre visite

58. Un supermarché commercialise des gaufrettes vendues en paquet pour lesquels :
- dans 5 % des cas l'emballage n'est pas intact,
- dans 70 % des paquets d'emballage non intact, il y a au moins une gaufrette cassée,
- 90 % des paquets d'emballage intact ne contiennent aucune gaufrette cassée.

1. Un client achète au hasard un paquet de ces gaufrettes.
On note I l'événement : « l'emballage est intact » et C l'événement : « au moins une gaufrette est cassée ».

a. Calculer la probabilité de I.

b. On considère les événements suivants :
E « L'emballage n'est pas intact et aucune gaufrette n'est cassée ».

F : « l'emballage est intact et aucune gaufrette n'est cassée ».
Exprimer E et F en fonction de I, $\overline{\text{I}}$ et $\overline{\text{C}}$.
Calculer alors les probabilités de E et de F.
En déduire la probabilité de $\overline{\text{C}}$ puis celle de C.

2. Lors d'une vente promotionnelle dans ce supermarché, ces gaufrettes sont vendues par lots de cinq paquets. Un client achète au hasard un tel lot. On suppose que les tirages des paquets formant un lot sont indépendants.
Quelle est la probabilité pour que dans ce lot :
- il y ait au moins quatre paquets d'emballage intact ?
- il n'y ait aucune gaufrette cassée ?

On donnera les résultats à 10^{-4} près.

---

59. Une compagnie de transport, dont la clientèle est composée d'usagers réguliers effectuant 40 trajets par mois (un le matin, un le soir sur 20 jours), étudie un projet offrant à ces usagers le choix entre :
- un titre de transport (noté C dans ce qui suit) de 100 euros pour l'ensemble des trajets mensuels ;
- pour les voyageurs ne voulant pas se procurer le titre de transport C le paiement d'une taxe de M euros en cas de contrôle.

La compagnie prévoit d'organiser les contrôles de façon que la probabilité d'un tel contrôle soit pour chaque trajet égale à $\frac{1}{10}$, avec indépendance d'un trajet par rapport à l'autre.
Le but de l'exercice est de déterminer le montant M de la taxe pour que, du point de vue du calcul des probabilités, les deux choix proposés aux voyageurs soient financièrement équivalents pour la compagnie.
Soit A un voyageur pris au hasard. On note X la variable aléatoire « nombre de trajets de A contrôlés sur un mois ».

1. ***a.*** Donner la loi de probabilité de X, c'est-à-dire l'expression en fonction de k de la probabilité $p(X=k)$ (k entier compris entre 0 et 40).

b. Calculer le nombre moyen de trajets contrôlés, c'est-à-dire l'espérance mathématique de X.

c. Quelle sera, en fonction de M, le coût moyen mensuel des trajets pour un usager qui ne se procurera pas le titre de transport C ?
En déduire la valeur qu'il convient de donner à M pour que, en moyenne, les deux choix proposés aux usagers soient financièrement équivalents pour la compagnie.

2. Dans cette question on pose M = 25.

a. Donner des valeurs décimales approchées à 10^{-3} près des probabilités $p(X=0)$, $p(X=1)$, $p(X=2)$ et $p(X=3)$.

b. Si A ne s'est pas procuré le titre de transport C, quelle est la probabilité pour que le coût de ses trajets mensuels soit au moins égal à 100 euros ?

Contactez nous sur facadm16@gmail.com à votre service inchallah

EXERCICES DE PROBABILITÉS

60. Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs **avec remise de chaque boule après tirage**. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche.

Partie A - Dans cette question, on ira au maximum à 4 tirages. On appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche. Par convention, X sera égale à 0 si l'on n'obtient pas de boule blanche après les quatre tirages.

1. Calculer la probabilité pour que X soit égale à zéro.

2. Calculer la probabilité pour que X soit égale à k, k valant successivement 1, 2, 3 et 4.

Partie B - Dans cette question, on procédera à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul. De même, on appellera X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche et ici encore X sera nulle si l'on n'obtient pas de boule blanche après n tirages.

1. Calculer la probabilité pour que X soit égale à k, k étant un entier naturel variant de 1 à n.

2. On considère le polynôme Q tel que $Q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$.

Soit E(X) l'espérance de la variable aléatoire X. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \frac{3}{5} Q\left(\frac{2}{5}\right)$.

3. On sait que pour tout réel x différent de 1, on a $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

a. En dérivant les deux membres de l'égalité précédente, en déduire une autre expression de

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

b. En déduire que $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3} - \left(n + \frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

---

61. Une partie de loterie consiste à lâcher une bille dans un appareil qui comporte 6 portes de sortie, numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de la porte de sortie franchie par la bille. Sa loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6
$p(X=i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

La règle du jeu est la suivante : un joueur mise 2 euros ; il reçoit 12 euros si la bille franchit les portes 1 ou 6, 2 euros si elle franchit les portes 3 ou 4. Les portes 2 et 5 ne rapportent rien.
Le gain d'un joueur est la différence entre ce qu'il reçoit à l'issue de la partie et sa mise.

1. Soit Y la variable aléatoire représentant le gain d'un joueur dans une partie.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. Le jeu est-il équitable ? (un jeu est équitable si l'espérance mathématique du gain est nulle)

2. Un joueur fait 5 parties successives, dont les issues sont supposées indépendantes.
Donner sous forme décimale au millième près :

a. la probabilité que le gain total du joueur à l'issue des cinq parties soit nul.

b. la probabilité que le joueur reçoive au moins une fois 12 euros.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

1. On considère les tirages successifs indépendants les uns des autres.

***a*.** Pour p_1, il faut tirer l'une des 7 boules blanches au premier tirage et n'importe quoi par la suite $p_1 = \frac{7}{11}$.

Pour p_2, il faut d'abord tirer l'une des 4 boules rouges, puis une des 7 boules blanches et n'importe quoi par la suite : $p_2 = \frac{4}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{14}{55}$.

On trouve de même :

$$p_3 = \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} = \frac{14}{165}$$

$$p_4 = \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{330}$$

$$p_5 = \frac{4}{11} \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{7} = \frac{1}{330}$$

Enfin, $p_6 = 0$ car il n'y a que 4 boules rouges. La première boule blanche fera son apparition au plus tard au 5ème tirage.

A plus forte raison, il est impossible que la première boule blanche apparaisse lors d'un tirage ultérieur. Si $k \geqslant 6$, $p_k = 0$.

***b*.** $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$.

La première boule blanche ne pouvant apparaître au plus tard qu'au 5ème tirage, l'événement la première boule tirée apparaît au 1er ou au 2ème ou au 3ème ou au 4ème ou au 5ème est un événement certain (probabilité égale à 1).

---

2. **1.** ***a*.** Un jeu ne peut se solder que par deux issues :

- ou bien les trois boules sont de la même couleur et il n'y a pas de vainqueur,
- ou bien il y a deux boules d'une couleur et la troisième boule est de l'autre couleur. Dans ce cas il ne peut y avoir qu'un gagnant (celui qui a la boule de couleur différente des deux autres).

***b*.** Les tirages dans les différentes urnes sont indépendants les uns des autres. Par suite :

$$p(\mathrm{E}_1) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32} \qquad \text{et} \qquad p(\mathrm{E}_2) = \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}.$$

***c*.** Il n'y a pas de vainqueur si les boules sont soit toutes rouges, soit toutes vertes.

$$p(\mathrm{E}) = p(\mathrm{E}_1) + p(\mathrm{E}_2) = \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}.$$

L'événement A : « Il y a un vainqueur » est l'événement contraire de l'événement E : « il n'y a pas de vainqueur » : $p(\mathrm{A}) = 1 - p(\mathrm{E}) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$.

2. ***a*.** J_1 est vainqueur si et seulement si :

- ou bien il tire une boule rouge et les deux autres joueurs tirent des vertes,
- ou bien il tire une boule verte et les deux autres joueurs tirent des rouges.

$$p(\mathrm{B}) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

***b*.** Formule des probabilités conditionnelles : $p(\mathrm{C}) = p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{p(\mathrm{A})}$

Il faut bien comprendre que si J_1 est vainqueur, il y a eu un vainqueur ; donc $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et par suite, $\mathrm{B} \cap \mathrm{A} = \mathrm{B}$. $p(\mathrm{C}) = \frac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{p(\mathrm{A})} = \frac{p(\mathrm{B})}{p(\mathrm{A})} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{13}{16}} = \frac{3}{13}$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

3. **1.** Formule : $E(X) = \sum x_i p_i$.

$E(X) = 220\times 0,08 + 230\times 0,10 + 240\times 0,15 + 250\times 0,32 + 260\times 0,16 + 270\times 0,15 + 280\times 0,04$

E(X) = 249,90.

$E(X^2) = 220^2\times 0,08 + 230^2\times 0,10 + 240^2\times 0,15 + 250^2\times 0,32 + 260^2\times 0,16 + 270^2\times 0,15 + 280^2\times 0,04$

$E(X^2) = 62689$.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 62689 - 62450,01$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 15,46$

2. Un fromage pèse au moins 250 g si sa masse est soit de 250 g, soit de 260 g, soit de 270 g, soit de 280 g. $p(X\geqslant 250) = 0,32 + 0,16 + 0,15 + 0,04 = 0,67$.

3. ***a.*** Avoir au moins un fromage de 220 g est l'événement contraire de n'avoir aucun fromage de 220 g. On a affaire à un schéma de Bernoulli (peser 220 g ou non) répété 10 fois, avec remise et de façon indépendante. On utilise donc la loi binomiale.
La probabilité de peser 220 g étant de 0,08, celle de ne pas peser 220 g est 1 – 0,08 = 0,92.
$p = 1 - 0,92^{10} \approx 0,56$.

b. Avoir au plus un fromage de 220 g signifie avoir exactement un fromage de 220 g ou bien aucun fromage de 220 g. $p = \binom{10}{1}\times 0,08\times 0,92^9 + 0,92^{10} \approx 0,81$.

4. On utilise la formule **des probabilités totales**. Désignons par A l'événement « le fromage est éliminé ». On réalise ensuite une partition de l'univers en quatre événements :
B_1 : « le fromage pèse 220 g » B_2 : « le fromage pèse 230 g »
B_3 : « le fromage pèse 240 g » B_4 : « le fromage pèse au moins 250 g ».

$$p(A) = \sum_{k=1}^{4} p(B_k)\times p_{B_k}(A) = 0,08\times 1 + 0,10\times 0,8 + 0,15\times 0,7 \approx 0,26.$$

---

4. Il faut d'abord remarquer que le choix des personnes est fait au hasard (**équiprobabilité**). On peut donc procéder par dénombrement. Le choix est fait sans ordre ni remise. Un choix est donc une **combinaison** de 3 personnes prises parmi 10.

a. Les 3 personnes ne peuvent appartenir au même groupe sanguin que si :
- ou bien elles sont toutes du groupe O,
- ou bien elles sont toutes du groupe A.

$$p = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4+1}{120} = \frac{1}{24}$$

b. Cinq cas peuvent se produire :
- ou bien deux sont O et une A, B ou AB,
- ou bien deux sont A et une O, B ou AB,
- ou bien deux sont B et une O, A ou AB,
- ou bien elles sont toutes du groupe O,
- ou bien elles sont toutes du groupe A.

$$p = \frac{\binom{4}{2}\times\binom{6}{1} + \binom{3}{2}\times\binom{7}{1} + \binom{2}{2}\times\binom{8}{1} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{6\times 6 + 3\times 7 + 1\times 8 + 4 + 1}{120} = \frac{70}{120} = \frac{7}{12}$$

c. L'événement « les 3 personnes sont toutes de groupes différents » est l'événement contraire de « deux au moins sont du même groupe », événement dont on vient de calculer la probabilité.

$$p = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

5. ***a*.** Pour chaque employé, il y a deux événements possibles : il est absent (probabilité 0,05) ou présent (probabilité : 1 – 0,05 = 0,95). On a donc affaire à un schéma de Bernoulli, répété trois fois de façon indépendante. On utilise la loi binomiale : $0{,}95^3 = 0{,}857375$.

***b*.** Plus généralement, en désignant par X la variable aléatoire égale au nombre d'employés absents, $p(X=k)=\binom{3}{k}\times 0{,}05^k \times 0{,}95^{3-k}$, ce qui donne

$$p(X=1) = 0{,}135375 \quad p(X=2) = 0{,}007125 \quad \text{et} \quad p(X=3) = 0{,}000125.$$

6. Il faut d'abord remarquer que l'équiprobabilité nous permet de travailler à l'aide de dénombrements et que le choix des délégués est fait sans ordre ni remise. Une délégation est donc une **combinaison** de 3 élèves pris parmi 25.

1. Le nombre de délégations est donc le nombre de combinaisons de 25 élèves pris 3 par 3 :

$$\binom{25}{3}=2300.$$

2. Il faut donc prendre A (1 élève parmi 1) et 2 élèves (parmi les 24 autres).

$$p=\frac{\binom{1}{1}\times\binom{24}{2}}{\binom{25}{3}}=\frac{276}{2300}=\frac{3}{25}$$

3. Il vaut mieux passer par le calcul de la probabilité de l'événement contraire : « aucun des deux ne fait partie de la délégation », c'est-à-dire prendre les 3 délégués parmi les 23 autres :

$$p=1-\frac{\binom{23}{3}}{\binom{25}{3}}=1-\frac{1771}{2300}=\frac{23}{100}$$

4. Il faut d'abord faire une partition : d'un côté les 15 filles, de l'autre les 10 garçons. Il peut y avoir entre 0 et 3 filles.

$$p(X=0)=\frac{\binom{15}{0}\times\binom{10}{3}}{\binom{25}{3}}=\frac{120}{2300}=\frac{6}{115} \qquad p(X=1)=\frac{\binom{15}{1}\times\binom{10}{2}}{\binom{25}{3}}=\frac{15\times 45}{2300}=\frac{27}{92}$$

$$p(X=2)=\frac{\binom{15}{2}\times\binom{10}{1}}{\binom{25}{3}}=\frac{105\times 10}{2300}=\frac{21}{46} \qquad p(X=3)=\frac{\binom{15}{3}\times\binom{10}{0}}{\binom{25}{3}}=\frac{455}{2300}=\frac{91}{460}$$

5. A chaque tirage au sort, deux issues possibles : soit A fait partie de la délégation (probabilité 3/25), soit il n'en fait pas partie (probabilité : 1–3/25=22/25). Il s'agit d'un schéma de Bernoulli. Ce tirage se répète dans les mêmes conditions à chacun des trois trimestres, de façon indépendante. On utilise donc la loi binomiale :

$$p=\binom{3}{1}\times\left(\frac{3}{25}\right)^1\times\left(\frac{22}{25}\right)^2=\frac{4356}{15625}\approx 0{,}279.$$

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

7. ***a*.** Le choix est fait sans ordre, ni remise, les dénombrements se feront donc à l'aide de combinaisons. Il faut faire développer les 8 films de Grèce et 3 parmi les 7 autres :

$$p=\frac{\binom{8}{8}\times\binom{7}{3}}{\binom{15}{11}}=\frac{1}{39}.$$

***b*.** Il doit faire développer 11 films parmi les 13 qui ne sont pas d'Italie : $p=\frac{\binom{13}{11}}{\binom{15}{11}}=\frac{2}{35}$.

***c*.** La seule possibilité est de faire développer 5 films de Yougoslavie, 5 films de Grèce et 1 d'Italie : $p=\frac{\binom{5}{5}\times\binom{8}{5}\times\binom{2}{1}}{\binom{15}{11}}=\frac{16}{195}$.

***d*.** Il y a cette fois deux possibilités :

- soit 1 film d'Italie, 2 de Yougoslavie et 8 de Grèce
- soit 2 films d'Italie, 4 de Yougoslavie et 5 de Grèce

$$p=\frac{\binom{2}{1}\times\binom{5}{2}\times\binom{8}{8}+\binom{2}{2}\times\binom{5}{4}\times\binom{8}{5}}{\binom{15}{11}}=\frac{20}{91}.$$

---

8. **1.** $\forall x\in \mathbf{R}-\{-1\}\quad f'(x)=\frac{x^3(4-x)}{(x+1)^6}$. Variations non rédigées … (voir cours d'analyse)

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$4^4/5^5$	↘	0

2. ***a*.** Il faut tirer 4 blanches (parmi n) puis une rouge (parmi 1), sans oublier qu'il y a ordre et remise : $p(n)=\left(\frac{n}{n+1}\right)^4\times\frac{1}{n+1}=\frac{n^4}{(n+1)^5}=f(n)$.

***b*.** D'après les variations de f, $p(n)$ est maximal pour n = 4. La probabilité maximale est $\frac{4^4}{5^5}=0{,}08192$.

---

9. ***a*.** Pour chaque réfrigérateur, il y a deux possibilités :

- soit il n'a pas de panne pendant la période de garantie (probabilité : 0,9)
- soit il tombe en panne pendant cette période (probabilité : 1 – 0,9 = 0,1).

Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli, répété 4 fois (puisqu'il y a 4 réfrigérateurs) de façon indépendante. On utilise donc la loi binomiale : $p=0{,}9^4=0{,}6561$.

***b*.** Même principe (en désignant par X la variable aléatoire égale au nombre de réfrigérateurs tombés en panne) : $p(\mathrm{X}=2)=\binom{4}{2}\times0{,}9^2\times0{,}1^2=0{,}0486$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

10. ***a.*** Le gain du joueur peut être de : 300 – 5 = 295 ou 0 – 5 = –5.

$$p(X=295)=\frac{1}{100}\quad\text{et}\quad p(X=-5)=\frac{99}{100}.\quad E(X)=295\times\frac{1}{100}-5\times\frac{99}{100}=-2$$

b. Le gain du joueur peut être de : 6 – 5 = 1 ou 0 – 5 = –5.

$$p(X=1)=\frac{50}{100}\quad\text{et}\quad p(X=-5)=\frac{50}{100}.\quad E(X)=1\times\frac{50}{100}-5\times\frac{50}{100}=-2$$

Constatation : les deux espérances sont les mêmes.

---

11. Le mot « indiscernable » garantit l'équiprobabilité. On procède à un tirage avec ordre (une à une) et sans remise (on pose les boules au fur et à mesure dans les cases).

1. Pour l'événement A, il ne faut tirer successivement quatre boules noires :

$$p(\text{A})=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{14}.$$

Pour l'événement B, il faut tirer 2 boules noires parmi 5, puis 2 boules blanches parmi 3 :

$$p(\text{B})=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{14}.$$

Pour l'événement C, il faut tirer 3 boules blanches parmi 3, 1 boule noire parmi 5, sans oublier de déterminer les cases dans lesquelles seront les boules blanches (tirage avec ordre dans une partition) : $p(\text{C})=\binom{4}{3}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{5}=\frac{1}{14}$.

2. La variable X prend les valeurs 1, 2, 3 et 4 :

$$p(\text{X}=1)=\frac{5}{8}\times\frac{7}{7}\times\frac{6}{6}\times\frac{5}{5}=\frac{5}{8}$$

(on tire d'abord une boule noire parmi 5, puis 3 boules quelconques parmi les 7 qui restent).

$$p(\text{X}=2)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{6}{6}\times\frac{5}{5}=\frac{15}{56}$$

(on tire d'abord une boule blanche parmi 3, puis une boule noire parmi 5 et enfin 2 boules quelconques parmi les 6 qui restent).

$$p(\text{X}=3)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{5}=\frac{5}{56}$$

(on tire d'abord deux boules blanches parmi 3, puis une boule noire parmi 5 et enfin 1 boule quelconque parmi les 5 qui restent).

$$p(\text{X}=4)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{5}=\frac{1}{56}$$

(on tire d'abord trois boules blanches parmi 3, puis 1 boule noire parmi 5).

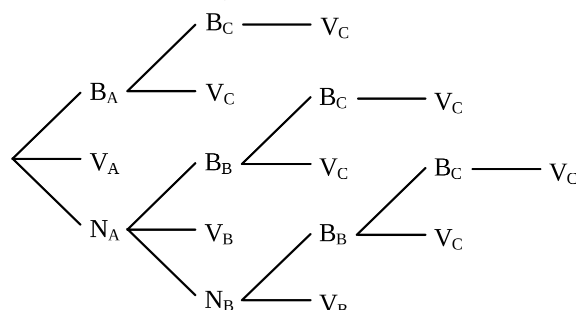
Formule : $\text{E(X)}=\sum x_i p_i=\frac{1\times35+2\times15+3\times5+4\times1}{56}=\frac{3}{2}$.

---

12. On commence par réaliser un arbre en notant les événements de la façon suivante :

B_A : On tire une boule blanche de l'urne A,

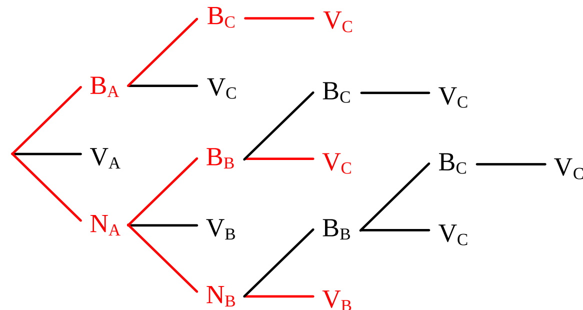
V_B : On tire une boule verte de l'urne B, …



EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

a. Pour tirer exactement trois boules, il y a trois possibilités :

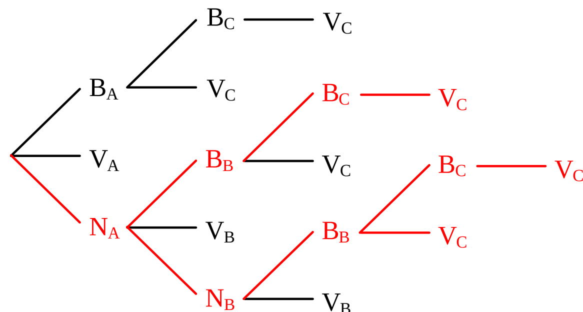
- soit une blanche de A, puis une blanche de C et enfin une verte de C,
- soit une noire de A, puis une blanche de B et enfin une verte de C,
- soit une noire de A, puis une noire de B et enfin une verte de B.



$$p=\frac{2}{10}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}+\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{47}{180}$$

b. Pour tirer au moins quatre boules, il y a trois possibilités :

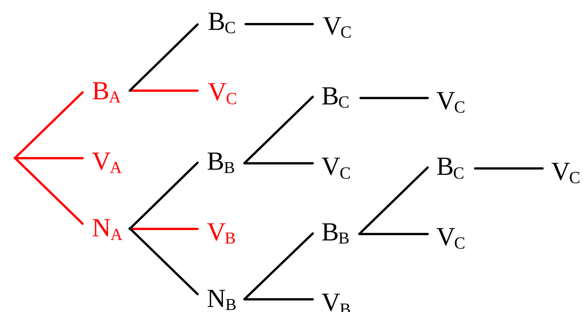
- soit une noire de A, une blanche de B, une blanche de C et une verte de C.
- soit une noire de A, une noire de B, une blanche de B, une blanche de C et une verte de C,
- soit une noire de A, une noire de B, une blanche de B et une verte de C.



$$p=\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}+\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}+\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{36}$$

c. Pour tirer au plus deux boules, il y a trois possibilités :

- soit une blanche de A et une verte de C,
- soit une verte de A,
- soit une noire de A et une verte de B.



$$p=\frac{2}{10}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{10}+\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{5}$$

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

13. **1.** On utilise le fait que les jets des deux dés sont indépendants :

$$p=\frac{12}{20}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{5}=0{,}4$$

Pour Vick, ne pas se laisser piéger : on a les conditions pour qu'il **perde** son combat !

$$v=1-\frac{13}{20}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{24}\approx 0{,}458.$$

2. « Gagner au moins une fois » est l'événement contraire de « perdre 4 fois ».
A chaque combat, il y a deux issues : gagner (probabilité : 2/5) ou perdre (probabilité : 3/5) … schéma de Bernoulli … répété 4 fois … loi binomiale :

$$p_4=1-\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{544}{625}=0{,}8704.$$

3. ***a*.** Même principe avec n combats : $p_n=1-\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

***b*.** Pour trouver le plus petit n tel que $p_n\geqslant 0{,}9$, on résout l'inéquation :

$$p_n\geqslant 0{,}9 \iff 1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\geqslant 0{,}9$$

$$p_n\geqslant 0{,}9 \iff \left(\frac{3}{5}\right)^n\leqslant 0{,}1$$

la fonction ln étant croissante sur $]0;+\infty[$,

$$p_n\geqslant 0{,}9 \iff \ln\left(\frac{3}{5}\right)^n\leqslant \ln 0{,}1$$

$$p_n\geqslant 0{,}9 \iff n\ln\frac{3}{5}\leqslant \ln 0{,}1$$

ln 0,6 < 0 car 0,6 < 1 donc :

$$p_n\geqslant 0{,}9 \iff n\geqslant\frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}6}$$

$$p_n\geqslant 0{,}9 \iff n\geqslant 4{,}507\ldots$$

La plus petite valeur possible de n est donc 5.

---

14. ***a*.** On utilise les probabilités totales : un bulbe planté provient ou bien du premier grossiste ou bien du second. $p(\mathrm{R})=p(\mathrm{R}\cap\mathrm{G}_1)+p(\mathrm{R}\cap\mathrm{G}_2)$

$$p(\mathrm{R})=p(\mathrm{G}_1)\times p_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{R})+p(\mathrm{G}_2)p_{\mathrm{G}_2}(\mathrm{R})$$

Comme le second grossiste ne fournit pas de fleurs rouges,

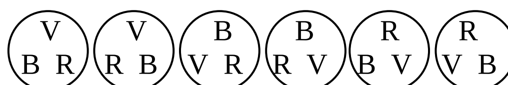
$$p(\mathrm{R})=\frac{70}{100}\times\frac{90}{100}+\frac{30}{100}\times 0=\frac{63}{100}$$

***b*.** De même, $p(\mathrm{J})=\frac{70}{100}\times 0+\frac{30}{100}\times\frac{80}{100}=\frac{6}{25}$.

***c*.** Enfin, ne pas obtenir de fleur est l'événement contraire d'obtenir une fleur, c'est-à-dire ou bien une rouge ou bien une jaune : $p(\overline{\mathrm{F}})=1-p(\mathrm{F})=1-p(\mathrm{R}\cup\mathrm{J})=1-\left(\frac{63}{100}+\frac{6}{25}\right)=\frac{13}{100}$

---

15. **1.** ***a)*** Il y a 6 configurations (autant que de permutations des trois lettres V, B et R).



***b*.** La somme des probabilités des configurations possibles étant égale à 1, s'il y a équiprobabilité, chacune d'elles a pour probabilité 1/6.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

2. L’événement E_1 est réalisé dans 2 des configurations. $p(E_1) = 2/6 = 1/3$.
L’événement E_2 est réalisé dans 2 des configurations. $p(E_2) = 2/6 = 1/3$.
L’événement E_3 est réalisé dans 1 des configurations. $p(E_3) = 1/6$.
L’événement E_4 est réalisé dans 4 des configurations. $p(E_4) = 4/6 = 2/3$.

3. $p_{E_1}(E_2) = \dfrac{p(E_2 \cap E_1)}{p(E_1)} = \dfrac{p(E_3)}{p(E_1)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

Puisque $p_{E_1}(E_2) \neq p(E_2)$, les événements E_1 et E_2 ne sont pas indépendants.

4. On utilise la **loi binomiale**. A chaque lancer, le joueur a une probabilité 1/3 de gagner (probabilité de E_1) et une probabilité 2/3 de perdre. $p = \binom{5}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{80}{243}$.

---

16. **1.** ***a.*** Il y a ordre (successivement) et remise. Compte tenu de l’équiprobabilité et de l’ordre imposé aux trois cartes cherchées : $p = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{216}$.

b. Il y a ordre mais pas remise. $p = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{120}$.

2. ***a.*** Il n’y a plus, ni ordre, ni remise (simultanément). On a donc affaire à des **combinaisons**.

$$p = \frac{1 \times 1 \times 1}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{20}.$$

b. Cette fois, il faut changer la partition :

- d’un côté les trois 7,
- d’un autre côté les deux 8,
- d’un dernier côté le 9.

$$p = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{10}.$$

3. Cette fois, on a ordre mais pas remise, ce sont des arrangements.

a. $p = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$.

b. Les 6 permutations des trois cartes tirées ont la même probabilité et il y en a 5 qui ne sont pas dans l’ordre 7, 8, 9 : $p = \dfrac{1}{20} \times 5 = \dfrac{1}{4}$.

---

17. **1.** On utilise la proportionnalité et le fait que la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 :

$$\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{1+2+3+4} = \frac{1}{10}$$

$$p_1 = \frac{1}{10},\ p_2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},\ p_3 = \frac{3}{10} \text{ et } p_4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

2. ***a.*** On obtient une somme égale à 2 en tirant 1 sur chaque dé. Les jets des deux dés étant indépendants : $p(X = 2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{40}$.

Somme égale à 3 en tirant 1 et 2 **ou** 2 et 1 : $p(X = 3) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{2}{10} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{40}$.

Somme égale à 4 en tirant 1 et 3 **ou** 2 et 2 **ou** 3 et 1 : $p(\mathrm{X}=4)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{6}{40}$

Somme égale à 5 en tirant 1 et 4 **ou** 2 et 3 **ou** 3 et 2 **ou** 4 et 1 :

$$p(\mathrm{X}=5)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}=\frac{10}{40}$$

Somme égale à 6 en tirant 2 et 4 **ou** 3 et 3 **ou** 4 et 2 : $p(\mathrm{X}=6)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{10}=\frac{9}{40}$

Somme égale à 7 en tirant 3 et 4 **ou** 4 et 3 : $p(\mathrm{X}=7)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{7}{40}$.

Somme égale à 8 en tirant 4 et 4 : $p(\mathrm{X}=8)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{10}=\frac{4}{40}$.

b. La probabilité d'avoir une somme égale à 5 est 1/4. Celle de ne pas avoir une somme égale à 5 est 1–1/4 = 3/4. Loi binomiale : $p=\binom{6}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{135}{4096}\approx 0{,}033$.

---

18. 1. ***a.*** On utilise le principe des probabilités totales :

$p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{F}_1\cap\mathrm{S}) + p(\mathrm{F}_2\cap\mathrm{S}) + p(\mathrm{F}_3\cap\mathrm{S})$

$p(\mathrm{S}) = p(\mathrm{F}_1)\times p_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{S})+p(\mathrm{F}_2)\times p_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{S})+p(\mathrm{F}_3)\times p_{\mathrm{F}_3}(\mathrm{S})$

$p(\mathrm{S}) = \frac{20}{100}\times\frac{90}{100}+\frac{50}{100}\times\frac{95}{100}+\frac{30}{100}\times\frac{80}{100}=\frac{179}{200}$

b. $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{F}_1)=\frac{p(\mathrm{F}_1\cap\mathrm{S})}{p(\mathrm{S})}=\frac{\frac{20}{100}\times\frac{90}{100}}{\frac{179}{200}}=\frac{36}{179}\approx 0{,}201$

2. Pour chaque pneu, il y a deux issues possibles : être défectueux (avec une probabilité égale à 0,105) ou être sans défaut (avec une probabilité égale à 0,895). On considère que le nombre de pneus achetés est suffisamment important pour que ces événements soient indépendants les uns des autres. On utilise donc la loi binomiale de paramètres 12 et 0,105. Un pneu au plus est défectueux signifie qu'il y a ou bien 0 ou bien 1 pneu défectueux.

$\mathrm{R}=\binom{12}{0}\times 0{,}105^0\times 0{,}895^{12}+\binom{12}{1}\times 0{,}105^1\times 0{,}895^{11}=0{,}895^{12}+12\times 0{,}105\times 0{,}895^{11}$

$\mathrm{R}=0{,}895^{11}(0{,}895+1{,}26)=0{,}895^{11}\times 2{,}155\approx 0{,}636$

3. ***a.*** $p_1=p(\mathrm{T}<50000)=p(\mathrm{T}\leqslant 50000)=\int_0^{50000}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=-\int_0^{50000}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=-\left[\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^{50000}$

$p_1=1-\mathrm{e}^{-50000\lambda}=1-\mathrm{e}^{-1}=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$

b. $p_2=p(\mathrm{T}>50000)=1-p(\mathrm{T}\leqslant 50000)=1-\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$

c. $p_3=p_{\mathrm{T}>25000}(\mathrm{T}>50000)=\frac{p\big((\mathrm{T}>25000)\cap(\mathrm{T}>50000)\big)}{p(\mathrm{T}>25000)}=\frac{p(\mathrm{T}>50000)}{p(\mathrm{T}>25000)}=\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}}{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ (loi sans vieillissement).

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

19. **1.** ***a.*** Pour chaque animal, la probabilité d'être malade est 5/1000 et celle de ne pas être porteur de la maladie est 995/1000. On utilise la loi binomiale :

$$p(X=0)=\left(\frac{995}{1000}\right)^{10}\approx 0{,}951$$

$$p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)\approx 0{,}049$$

b. L'espérance mathématique, dans le cas de la loi binomiale est donnée par $E(X)=np$.

$$E(X)=n\frac{5}{1000}.$$

$$E(X)=0{,}1 \quad\Leftrightarrow\quad n\frac{5}{1000}=0{,}1 \quad\Leftrightarrow\quad n=20.$$

2. ***a.*** Pour tout animal, de deux choses l'une :

- ou bien il est malade,
- ou bien il n'est pas malade.

Autrement dit, M et $\overline{M}$ réalisent une partition de l'univers.
On utilise les **probabilités totales** :

$$p(T)=p(T\cap M)+p(T\cap\overline{M})$$

$$p(T)=p(M)\times p_M(T)+p(\overline{M})\times p_{\overline{M}}(T)$$

$$p(T)=\frac{5}{1000}\times 0{,}8+\frac{995}{1000}\times(1-0{,}9)=\frac{207}{1000}=0{,}1035$$

b. $p_T(M)=\dfrac{p(M\cap T)}{p(T)}=\dfrac{p(M)\times p_M(T)}{p(T)}=\dfrac{\frac{5}{1000}\times 0{,}8}{\frac{207}{2000}}=\dfrac{8}{207}.$

20. **1.** Pour l'équipe jaune, on peut réaliser un arbre :

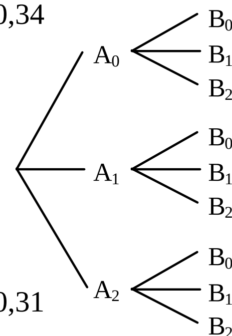
$p(X=0) = p(A_0\cap B_0) = 0{,}4\times 0{,}3 = 0{,}12$

$p(X=1) = p(A_0\cap B_1)+p(A_1\cap B_0) = 0{,}4\times 0{,}4+0{,}4\times 0{,}3 = 0{,}28$

$p(X=2) = p(A_0\cap B_2)+p(A_1\cap B_1)+p(A_2\cap B_0) = 0{,}4\times 0{,}3+0{,}4\times 0{,}4+0{,}2\times 0{,}3 = 0{,}34$

$p(X=3) = p(A_1\cap B_2)+p(A_2\cap B_1) = 0{,}4\times 0{,}3+0{,}2\times 0{,}4 = 0{,}20$

$p(X=4) = p(A_2\cap B_2) = 0{,}2\times 0{,}3=0{,}06$



De même pour l'équipe verte :

$p(Y=0) = p(C_0\cap D_0) = 0{,}3\times 0{,}5 = 0{,}15$

$p(Y=1) = p(C_0\cap D_1)+p(C_1\cap D_0) = 0{,}3\times 0{,}3+0{,}5\times 0{,}5 = 0{,}34$

$p(Y=2) = p(C_0\cap D_2)+p(C_1\cap D_1)+p(C_2\cap D_0) = 0{,}3\times 0{,}2+0{,}5\times 0{,}3+0{,}2\times 0{,}5 = 0{,}31$

$p(Y=3) = p(C_1\cap D_2)+p(C_2\cap D_1) = 0{,}5\times 0{,}2+0{,}2\times 0{,}3 = 0{,}16$

$p(Y=4) = p(C_2\cap D_2) = 0{,}2\times 0{,}2=0{,}04$

2. Désignons par N l'événement : il y a match nul.

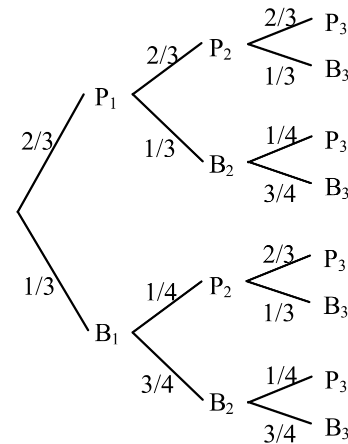
$p(N) = p(X=0 \cap Y=0) + p(X=1 \cap Y=1) + p(X=2 \cap Y=2) + p(X=3 \cap Y=3) + p(X=4 \cap Y=4)$

$p(N) = p(X=0)\times p(Y=0)+p(X=1)\times p(Y=1)+p(X=2)\times p(Y=2)+p(X=3)\times p(Y=3)+p(X=4)\times p(Y=4)$

$p(N) = 0{,}12\times 0{,}15 + 0{,}28\times 0{,}34 + 0{,}34\times 0{,}31 + 0{,}20\times 0{,}16 + 0{,}06\times 0{,}04 = 0{,}253$

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

21. 1. Les événements B_1 et P_1 réalisant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :



$$p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(P_1 \cap B_2)$$

$$p(B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(P_1) \times p_{P_1}(B_2)$$

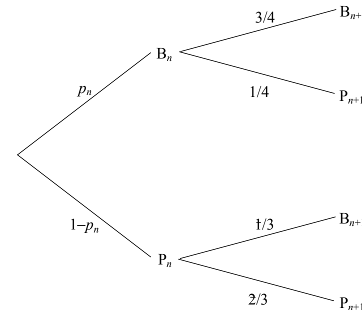
$$p(B_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{17}{36}.$$

De même,

$$p(B_3) = p(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + p(B_1 \cap P_2 \cap B_3) + p(P_1 \cap B_2 \cap B_3) + p(P_1 \cap P_2 \cap B_3)$$

$$p(B_3) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + \frac{4}{27} = \frac{229}{432}.$$

2. Toujours selon le principe des probabilités totales :



$$p_{n+1} = p(B_{n+1}) = p(B_n \cap B_{n+1}) + p(P_n \cap B_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p(B_n) \times p_{B_n}(B_{n+1}) + p(P_n) \times p_{P_n}(B_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3} = p_n \times \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{5}{12} p_n + \frac{1}{3}.$$

3. La suite (p_n) est constante si, et seulement si :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ p_n = p_{n+1}\right) \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ p_n = \frac{5}{12} p_n + \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ \frac{7}{12} p_n = \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ p_n = \frac{4}{7}\right)$$

La seule valeur de p_1 telle que la suite des probabilités p_n soit constante est donc $\frac{4}{7}$.

4. Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{7} = \frac{5}{12} p_n + \frac{1}{3} - \frac{4}{7} = \frac{5}{12} p_n - \frac{5}{21} = \frac{5}{12}\left(p_n - \frac{4}{7}\right) = \frac{5}{12} u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{4}{7}$.

Son terme général est : $u_n = \left(p_1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}$.

Celui de la suite (p_n) est : $p_n = u_n + \frac{4}{7} = \left(p_1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$.

Puisque $-1 < \frac{5}{12} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} = 0$ d'où (théorèmes d'opérations) $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{4}{7}$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

22. **1.** Première remarque : le choix des employés est fait sans ordre (on ne différencie pas les deux postes à pourvoir) et sans remise (une même personne ne peut occuper les deux postes). On a donc affaire à des combinaisons.

a. Il s'agit de choisir deux femmes parmi deux. $p=\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{1}{15}$.

b. Il s'agit de choisir deux hommes parmi quatre. $p=\dfrac{\binom{4}{2}}{15}=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$.

c. Il s'agit de choisir : ou bien deux femmes parmi deux, ou bien deux hommes parmi quatre.
$p=\dfrac{1}{15}+\dfrac{6}{15}=\dfrac{7}{15}$.

d. Il s'agit de choisir une femme parmi deux et un homme parmi quatre.

$$p=\frac{\binom{2}{1}\times\binom{4}{1}}{15}=\frac{2\times 4}{15}=\frac{8}{15}.$$

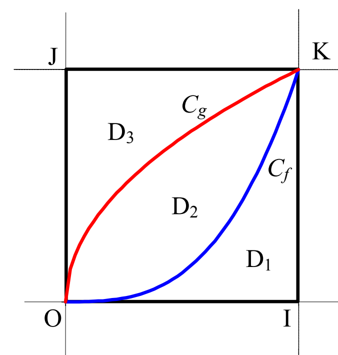
2. On a affaire à un schéma de Bernoulli (pour chaque poste : une femme avec une probabilité $\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$ ou pas une femme avec une probabilité $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$) répété trois fois (trois postes) de façon indépendante (pour chaque poste, le nombre d'hommes et de femmes candidats est le même). On utilise donc la loi binomiale : $p=\binom{3}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^1=\dfrac{36}{125}$.

---

23. **1.** $A_1=9\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x=9\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{9}{4}$

$A_2=9\displaystyle\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^3\right)\mathrm{d}x=9\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=9\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{4}$

$A_3=9-(A_1+A_2)=9-\left(\dfrac{9}{4}+\dfrac{15}{4}\right)=3$



2. ***a.*** « Rater la cible » est l'événement contraire d'« atteindre la cible ».
Sa probabilité est : 1 – 0,6 = 0,4.

b. On utilise la proportionnalité : $\dfrac{p_1}{9/4}=\dfrac{p_2}{15/4}=\dfrac{p_3}{3}=\dfrac{p_1+p_2+p_3}{9/4+15/4+3}=\dfrac{0,6}{9}$ d'où

$p_1=\dfrac{0,6}{9}\times\dfrac{9}{4}=0,15=\dfrac{3}{20}$, $p_2=\dfrac{0,6}{9}\times\dfrac{15}{4}=0,25=\dfrac{1}{4}$ et $p_3=\dfrac{0,6}{9}\times 3=0,2=\dfrac{1}{5}$.

3. ***a.*** « Marquer au moins un point » est l'événement contraire de « ne marquer aucun point », c'est-à-dire de rater deux fois la cible $1-0,4\times0,4=1-0,16=0,84=\dfrac{21}{25}$.

b. Pour marquer exactement trois points, il faut marquer :
- ou bien 1 point et 2 points (n'oubliez pas ! au premier ou au deuxième lancer),
- ou bien 0 point et 3 points.

$0,15\times0,2+0,2\times0,15+0,4\times0,25+0,4\times0,25\times0,4=0,26$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

24. 1. *a.* Première remarque : on peut assimiler le choix des personnes à un tirage de Bernoulli (être ou ne pas être bachelier … telle est la question) répété un certain nombre de fois (trois postes) de façon indépendante (le nombre de personnes étant très grand la probabilité ne change pratiquement pas d'une personne à la suivante). On utilise donc la loi binomiale :

$$p=\binom{8}{2}\times\left(\frac{300}{1200}\right)^2\times\left(\frac{900}{1200}\right)^6$$ Valeur approchée à 10^{-2} près par défaut : 0,31.

b. La probabilité de trouver au moins un bachelier se trouve facilement au moyen de l'événement contraire (n'avoir aucun bachelier, c'est-à-dire n non-bacheliers). Elle est égale à $1-\left(\frac{900}{1200}\right)^n=1-\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Il s'agit de résoudre l'inéquation :

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\geqslant 0,95 \Leftrightarrow 0,05\geqslant\left(\frac{3}{4}\right)^n \Leftrightarrow \ln 0,05\geqslant \ln\left(\frac{3}{4}\right)^n \Leftrightarrow \ln 0,05\geqslant n\ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

et comme $\frac{3}{4}$ est inférieur à 1, son logarithme est négatif.

$$1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\geqslant 0,95 \Leftrightarrow \frac{\ln 0,05}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}\leqslant n \Leftrightarrow n\geqslant 10,4\ldots$$

Le nombre minimal est donc de 11 personnes.

2. Il s'agit de choisir 8 personnes parmi 20 sans remise ni ordre. On a donc affaire à des combinaisons. Il faut prendre 2 bacheliers parmi 5 et 6 non-bacheliers parmi 15 :

$$p=\frac{\binom{5}{2}\times\binom{15}{6}}{\binom{20}{8}}$$ Valeur approchée à 10^{-2} près par défaut : 0,39.

---

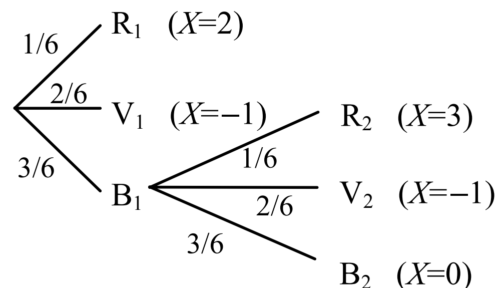
25. *a.* Les valeurs prises par la variable X sont :

$X=2$: une face rouge.

$X=-1$: **ou bien** une face verte **ou bien** une face blanche puis une face verte.

$X=3$: une face blanche puis une face rouge.

$X=0$: une face blanche puis une face blanche.



b. $p(X=2)=\frac{1}{6}$ $\quad p(X=-1)=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$

$p(X=3)=\frac{3}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$ $\quad p(X=0)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$

c. $\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{6}+(-1)\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{12}+0\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

---

26. 1. Le tirage est fait sans ordre ni remise. On a affaire à des combinaisons.

Dans le jeu, il y a 8 piques : $p=\dfrac{\binom{8}{5}}{\binom{32}{5}}=\dfrac{\frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1}}{\frac{32\times31\times30\times29\times28}{5\times4\times3\times2\times1}}=\dfrac{1}{3596}\approx 2,8\times10^{-4}$

Plus généralement, il ne reste plus qu'à multiplier la probabilité précédente par 4 (nombre de couleurs) : $p=\frac{4}{3596}=\frac{1}{899}\approx 1,1\times10^{-3}$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

2. On réalise une partition : d'un côté les 4 as, de l'autre les 28 autres cartes.

$$p=\frac{\binom{4}{4}\times\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}}=\frac{1}{7192}\approx 1,4\times 10^{-4}.$$

Plus généralement, il faut choisir la valeur dont on tirera les 4 cartes puis tirer la dernière carte

$$p=\frac{8\times\binom{4}{4}\times\binom{28}{1}}{\binom{32}{5}}=\frac{8}{7192}=\frac{1}{899}\approx 1,1\times 10^{-3}.$$

3. On réalise une partition : d'une part les 4 as, d'autre part les 4 rois et enfin les 24 autres cartes.

$$p=\frac{\binom{4}{3}\times\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}}=\frac{3}{25172}\approx 1,2\times 10^{-4}.$$

Plus généralement, il faut choisir la hauteur dont on tirera 3 cartes (8 hauteurs possibles) et celle dont on tirera 2 cartes (il ne reste plus que 7 hauteurs) :

$$p=\frac{8\times\binom{4}{3}\times 7\times\binom{4}{2}}{\binom{32}{5}}=\frac{6}{899}\approx 6,7\times 10^{-3}.$$

---

27. **1.** Remarque : il y a 999 nombres possibles.

Pour E_1 : Un multiple de 5 se termine par 5 ou 0.

- multiples à un chiffre, il y a un seul nombre : 5
- multiples à deux chiffres, il faut choisir le chiffre des dizaines parmi 9 (de 1 à 9) puis un 0 ou un 5. Il y en a : 9×2 = 18.
- multiples à trois chiffres, il faut choisir le chiffre des centaines parmi 9 (de 1 à 9), le chiffre des dizaines parmi 10 (de 0 à 9) puis un 0 ou un 5. Il y en a : 9×10×2 = 180.

Au total, $p(E_1)=\frac{1+18+180}{999}=\frac{199}{999}$. Par défaut à 10^{-3} près : 0,199.

Pour E_2 :

- multiples à un chiffre, il y a 9 nombres : de 1 à 9.
- multiples à deux chiffres, il faut choisir le chiffre des dizaines parmi 9 (de 1 à 9) puis le chiffre des unités parmi 9 (de 0 à 9 sauf celui des dizaines). Il y en a : 9×9 = 81.
- multiples à trois chiffres, il faut choisir le chiffre des centaines parmi 9 (de 1 à 9), le chiffre des dizaines parmi 9 (de 0 à 9 sauf celui des dizaines) puis le chiffre des unités parmi 8 (de 0 à 9 sauf celui des dizaines et celui des centaines). Il y en a : 9×9×8 = 648.

Au total, $p(E_2)=\frac{9+81+648}{999}=\frac{738}{999}=\frac{82}{111}$. Par défaut à 10^{-3} près : 0,738.

E_3 est le contraire de E_2 : $p(E_3)=1-p(E_2)=1-\frac{82}{111}=\frac{29}{111}$. Par défaut à 10^{-3} près : 0,261.

2. Les tirages sont indépendants. On a affaire à un tirage de Bernoulli (être ou ne pas être multiple de 5) répété 5 fois. On utilise la loi binomiale :

$p=\binom{5}{3}\times\left(\frac{199}{999}\right)^3\times\left(\frac{800}{999}\right)^2$. Par défaut à 10^{-3} près : 0,050.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

28. La réponse à chaque question constitue un schéma de Bernoulli. Ce schéma est répété 4 fois de manière indépendante. On utilise donc la loi binomiale.

1. Le candidat doit répondre correctement à la première question et n'importe quoi aux trois suivantes : $p = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$.

2. $p = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \approx 0{,}123$.

3. Toujours la loi binomiale : $p = \binom{4}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27} \approx 0{,}296$.

4. Pour gagner au moins 80 €, il peut répondre :

soit VVVV, soit VVFV, soit VFVV, soit FVVV, soit FFVV.

$$p = \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{11}{81} \approx 0{,}136$$

---

29. **1.** ***a.*** Pour former un mot commençant par C, il faut tirer un C (probabilité : 1/6) puis 3 lettres au fur et à mesure parmi les 5 autres, d'où la probabilité : $p = \frac{1}{6} \times \frac{5}{5} \times \frac{4}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{1}{6}$.

b. Il doit tirer successivement un L, un U , un C et un E : $p = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{360}$.

2. ***a.*** On a affaire à un aléa de Bernoulli : commencer par C (probabilité : $\frac{1}{6}$) ou non (probabilité : $\frac{5}{6}$). On utilise la loi binomiale : $p = \binom{8}{4} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}026$.

b. L'événement « au moins une fois un mot commençant par C » est le contraire de l'événement « avoir 8 mots ne commençant pas par C ». $p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0{,}767$.

---

30. **1.** Les signes des quatre personnes sont indépendants les uns des autres.
Le premier peut être né sous n'importe quel signe (probabilité : 12/12 = 1).
Le deuxième doit être né sous l'un des 11 autres signes (probabilité : 11/12).
Le troisième doit être né sous l'un des 10 signes restants (probabilité : 10/12).
Le quatrième doit être né sous l'un des 9 autres signes (probabilité : 9/12).

$$p = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} = \frac{55}{96}.$$

2. L'événement « Au moins deux d'entre eux sont du même signe » est le contraire de l'événement « Ils ont tous des signes différents ». Sa probabilité est donc : $p = 1 - \frac{55}{96} = \frac{41}{96}$.

3. Même principe qu'à la question précédente.
On passe par l'événement contraire : « Aucun des trois autres n'est de la Balance » dont la probabilité est : $\frac{11}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{11}{12} = \frac{1331}{1728}$.
La probabilité pour qu'au moins une des trois autres soit du même signe que l'aînée est donc :

$$p = 1 - \frac{1331}{1728} = \frac{397}{1728}.$$

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

31. **1.** Puisque les avaries sont des événements indépendants, on utilise la formule

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B).$$

$$p=a\times b=0{,}1\times 0{,}2=0{,}02.$$

2. Pour que la machine soit hors service il faut et il suffit que l'un au moins des deux éléments subisse une avarie. On utilise la formule $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.

$$p=a+b-ab=0{,}1+0{,}2-0{,}02=0{,}28.$$

3. $p(X=2)=0{,}02$. (trouvé au **1.**)

$p(X=1)=0{,}28-0{,}02=0{,}26$ (machine en panne mais pas les deux éléments en même temps)

$p(X=0)=1-0{,}28=0{,}72$ (machine pas en panne)

$E(X)=2\times 0{,}02+1\times 0{,}26+0\times 0{,}72=0{,}3$.

4. Désignons par M l'événement « la machine est en panne » :

$$p_M(X=1)=\frac{p\big((X=1)\cap M\big)}{p(M)}=\frac{p(X=1)}{p(M)}=\frac{0{,}26}{0{,}28}=\frac{26}{28}=\frac{13}{14}.$$

5. Les machines étant identiques, on a affaire à un schéma de Bernoulli (être ou ne pas être en panne) répété n fois indépendamment. On utilise la loi binomiale. La probabilité d'avoir au moins un machine en état de marche (événement contraire de toutes en panne) est $1-0{,}28^n$.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'inéquation :

$1-0{,}28^n>0{,}99 \iff 0{,}01>0{,}28^n$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$:

$1-0{,}28^n>0{,}99 \iff \ln 0{,}01>\ln 0{,}28^n \iff \ln 0{,}01>n\ln 0{,}28$

0,28 < 1. Son logarithme est donc strictement négatif :

$1-0{,}28^n>0{,}99 \iff \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}28}<n \iff n>3{,}6176\ldots$

La plus petite valeur de n est donc 4.

---

32. **1.** Puisque les faces obtenues sur les deux pièces sont des événements indépendants, on utilise la formule $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.

$A_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ (face et face) $\qquad B_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ (pile et pile)

$C_1=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ (ou bien pile et face, ou bien face et pile)

2. Pour qu'Alain gagne au $n^{\text{ième}}$ tour, il faut que la partie se soit prolongée jusque là. Les tirages étant indépendants : $A_n=\underbrace{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\cdots\times\dfrac{1}{2}}_{n-1\text{ tirages}}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Même chose pour Bernard : $B_n=\underbrace{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\cdots\times\dfrac{1}{2}}_{n-1\text{ tirages}}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Enfin, $C_n=\underbrace{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\cdots\times\dfrac{1}{2}}_{n-1\text{ tirages}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2^{n}}$.

3. Pour qu'Alain gagne au cours des n premiers tours, il faut qu'il gagne, **ou bien** au premier, **ou bien** au deuxième, …, **ou bien** au $n^{\text{ième}}$ tour :

$$P_n=A_1+A_2+\ldots+A_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$:

$$P_n = \frac{1}{4}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$ De même, $$Q_n = \frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

$$P_n + Q_n + C_n = 2\times\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 .$$

Au cours des n premiers tours, il n'y a que trois possibilités : soit Alain a gagné, soit Bernard a gagné, soit la partie se prolonge. L'événement écrit ci-dessus est donc certain (probabilité : 1).

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 0$. (jeu équitable)

---

33. **1.** Puisque les tirages de a et b sont successifs et avec remise, les tirages des deux premières boules sont indépendants.

$2 = 1 + 1$ donc $p(X=2) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$3 = 1 + 2 = 2 + 1$ donc $p(X=3) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$4 = 1 + 3 = 2 + 2 = 3 + 1$ donc $p(X=4) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

$5 = 2 + 3 = 3 + 2$ donc $p(X=5) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$6 = 3 + 3$ donc $p(X=6) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

2. $X = Y$ correspond à

- ou bien $X = Y = 2$ $(c = 1)$
- ou bien $X = Y = 4$ $(c = 2)$
- ou bien $X = Y = 6$ $(c = 3)$

$$p(X=Y) = \frac{1}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{27}$$

3. $p(Z=-2) = \frac{5}{27}$.

$Z = -1$ correspond à

- ou bien $X > 2$ (3, 4, 5 ou 6) et $Y = 2$ $(c = 1)$
- ou bien $X > 4$ (5 ou 6) et $Y = 4$ $(c = 2)$

$$p(Z=-1) = \left(\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)\times\frac{1}{3} = \frac{8}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{9}\times\frac{1}{3} = \frac{11}{27}.$$

$Z = +3$ correspond à
ou bien $X < 4$ (2 ou 3) et $Y = 4$ $(c = 2)$
ou bien $X < 6$ (2, 3, 4 ou 5) et $Y = 6$ $(c = 3)$

$$p(Z=3) = \left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\right)\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{2}{9}\right)\times\frac{1}{3} = \frac{3}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{3} = \frac{11}{27}.$$

$$E(Z) = -2\times\frac{11}{27}+(-1)\times\frac{11}{27}+3\times\frac{11}{27} = 0 .$$

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

34. **1.** Les incorporations des nucléotides étant indépendantes :

$$p(\mathrm{A,C,A}) = \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{32}{1000} = 0,032 .$$

Tous ces codons ont la même probabilité d'apparition. $p = (0,032)^9 \approx 3,5.10^{-14}$.

2. Trois éléments d'adénine : 1 (A,A,A)
Deux éléments d'adénine. Il faut choisir le troisième élément parmi 3 (U, G ou C) et sa position dans le codon : 3 × 3 = 9.
Un élément d'adénine. Il faut choisir deux éléments parmi 3 avec ordre et remise, puis l'emplacement du A : $3^2 \times 3 = 27$.
Aucun élément d'adénine : $3^3 = 27$.
Les 9 codons comportant exactement 2 éléments d'adénine ont tous la même probabilité ; d'où

$$p = 9 \times \left(\frac{40}{100}\right)^2 \times \frac{20}{100} = 0,288 .$$

3. $p(X=2) = 0,288$ $\qquad p(X=3) = 1 \times \left(\frac{40}{100}\right)^3 = 0,064$

$p(X=1) = 27 \times \frac{40}{100} \times \left(\frac{20}{100}\right)^2 = 0,432$ $\qquad p(X=0) = 27 \times \left(\frac{20}{100}\right)^3 = 0,216$

---

35. **1.** On commence par réaliser une partition de l'ensemble des cartes :

- les 6 as et rois de trèfle, de cœur ou de carreau qui rapportent **4 points**.
- les 2 as et roi de pique qui rapportent **2 points**.
- les 3 valet, dame et 10 de pique qui rapportent **-2 points**.
- les 9 valets, dames et 10 de trèfle, de cœur ou de carreau qui rapportent **0 point**.

$X=8$ pour deux cartes à 4 points (deux parmi 6) : $p(X=8) = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}} = \dfrac{15}{190} = \dfrac{3}{38} \approx 0,079$.

$X=6$ pour une carte à 4 points (une parmi 6) et une à 2 points (une parmi 2).

$$p(X=6) = \frac{2\times 6}{190} = \frac{12}{190} = \frac{6}{95} \approx 0,063$$

$X=4$ pour
ou bien deux cartes à 2 points (deux parmi 2)
ou bien une carte à 4 points (une parmi 6) et une à 0 point (une parmi 9).

$$p(X=4) = \frac{6\times 9 + \binom{2}{2}}{190} = \frac{55}{190} = \frac{11}{38} \approx 0,289$$

$X=2$ pour
ou bien une carte à 4 points (une parmi 6) et une à -2 points (une parmi 3)
ou bien une carte à 2 points (une parmi 2) et une à 0 point (une parmi 9).

$$p(X=2) = \frac{6\times 3 + 2\times 9}{190} = \frac{36}{190} = \frac{18}{95} \approx 0,189$$

$X=0$ pour
ou bien une carte à 2 points (une parmi 2) et une à -2 points (une parmi 3)
ou bien deux cartes à 0 point (deux parmi 9).

$$p(X=0) = \frac{2\times 3 + \binom{9}{2}}{190} = \frac{42}{190} = \frac{21}{95} \approx 0,221$$

$X=-2$ pour une carte à 0 point (une parmi 9) et une à −2 points (une parmi 3).

$$p(X=-2)=\frac{9\times3}{190}=\frac{27}{190}\approx0{,}142$$

$X=-4$ pour deux cartes à −2 points (deux parmi 3).

$$p(X=-4)=\frac{\binom{3}{2}}{190}=\frac{3}{190}\approx0{,}016$$

2. $E(X)=\frac{8\times15+6\times12+4\times55+2\times36-2\times27-4\times3}{190}=\frac{418}{190}=\frac{209}{95}=\frac{11}{5}=2{,}2$

$V(X)=\frac{64\times15+36\times12+16\times55+4\times36+4\times27+16\times3}{190}-4{,}84=\frac{1286}{95}-4{,}84\approx8{,}6968421$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\approx2{,}949$

3. Désignons par A l'événement "$X\leqslant0$" et par B l'événement "les deux cartes sont des piques". L'événement $A\cap B$ est $X=-4$.

$$p_A(B)=\frac{p(B\cap A)}{p(A)}=\frac{p(X=-4)}{p(X\leqslant0)}=\frac{\frac{3}{190}}{\frac{42}{190}+\frac{27}{190}+\frac{3}{190}}=\frac{3}{72}=\frac{1}{24}.$$

---

36. Partie A

1. D est l'événement contraire de R (ne rien acheter) $p(\mathrm{D})=1-p(\mathrm{R})=1-0{,}75=0{,}25$.

E est l'événement $\mathrm{L}\cap\mathrm{C}$. $p(\mathrm{L}\cap\mathrm{C})=p(\mathrm{L})+p(\mathrm{C})-p(\mathrm{L}\cup\mathrm{C})=0{,}2+0{,}1-0{,}25=0{,}05$.

F est l'événement $\mathrm{L}\cap\overline{\mathrm{C}}$. $p(\mathrm{L}\cap\overline{\mathrm{C}})=p(\mathrm{L})-p(\mathrm{L}\cap\mathrm{C})=0{,}2-0{,}05=0{,}15$.

G est l'événement $\mathrm{C}\cap\overline{\mathrm{L}}$. $p(\mathrm{C}\cap\overline{\mathrm{L}})=p(\mathrm{C})-p(\mathrm{L}\cap\mathrm{C})=0{,}1-0{,}05=0{,}05$.

2. $p_{\mathrm{L}}(\mathrm{C})=\frac{p(\mathrm{L}\cap\mathrm{C})}{p(\mathrm{L})}=\frac{0{,}05}{0{,}2}=0{,}25$.

Partie B

Pour chaque personne visitée, il n'y a que deux issues possibles : **ou bien** elle achète un livre ou une cassette (événement D de probabilité p = 0,25) **ou bien** elle n'achète rien (événement R de probabilité $q = 1 - p = 0{,}75$). Ceci est répété n fois, de façon indépendante. Il s'agit donc d'un schéma de Bernoulli. La variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de personnes achetant un livre ou une cassette suit donc la loi binomiale de paramètres n et 0,25.

$$p_n=p(X\geqslant1)=1-p(X=0)=1-\binom{n}{0}\times(0{,}25)^0\times(0{,}75)^n=1-0{,}75^n.$$

$$p_n>0{,}9\Leftrightarrow1-0{,}75^n>0{,}9\Leftrightarrow0{,}1>0{,}75^n\Leftrightarrow\ln0{,}1>\ln(0{,}75^n)\Leftrightarrow\ln0{,}1>n\ln0{,}75\Leftrightarrow\frac{\ln0{,}1}{\ln0{,}75}<n$$

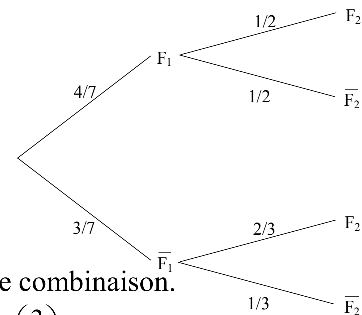
Or $\frac{\ln0{,}1}{\ln0{,}75}\approx8{,}004$. Il faut donc choisir n **supérieur ou égal à 9**.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

37. **1.** ***a.*** Si le premier candidat est un garçon, il reste quatre filles et deux garçons donc $p_{\overline{F_1}}(F_2)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$.

b. Si le premier candidat est une fille, il reste trois filles et trois garçons donc $p_{F_1}(F_2)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

c. Puisque F_1 et $\overline{F_1}$ réalisent une partition de l'univers, on utilise le principe des probabilités totales :



$p(F_2)=p(F_1\cap F_2)+p(\overline{F_1}\cap F_2)$

$p(F_2)=p(F_1)\times p_{F_1}(F_2)+p(\overline{F_1})\times p_{\overline{F_1}}(F_2)$

$p(F_2)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{7}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{7}$.

2. ***a.*** Puisque les candidats sont tirés simultanément, un tirage est une combinaison.

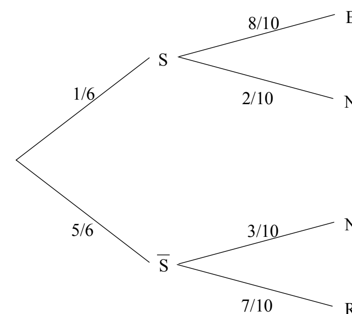
$p(X=1)=\dfrac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{3}}{\binom{7}{4}}=\dfrac{4\times1}{35}=\dfrac{4}{35}$ $\quad p(X=2)=\dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{3}{2}}{\binom{7}{4}}=\dfrac{6\times3}{35}=\dfrac{18}{35}$

$p(X=3)=\dfrac{\binom{4}{3}\times\binom{3}{1}}{\binom{7}{4}}=\dfrac{4\times3}{35}=\dfrac{12}{35}$ $\quad p(X=4)=\dfrac{\binom{4}{4}\times\binom{3}{0}}{\binom{7}{4}}=\dfrac{1\times1}{35}=\dfrac{1}{35}$

b. $E(X)=1\times\dfrac{4}{35}+2\times\dfrac{18}{35}+3\times\dfrac{12}{35}+4\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{80}{35}=\dfrac{16}{7}\approx2,29$.

---

38. **1.** ***a.*** Désignons par S l'événement « le numéro obtenu est 6 », B, N et R les événements « la boule est blanche », « la boule est noire » et « la boule est rouge ».



$p(B)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{8}{10}=\dfrac{2}{15}$.

b. $p(R)=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{7}{12}$.

c. • ou bien vous utilisez les résultats précédents :

$p(N)=1-[p(B)+p(R)]=1-\left(\dfrac{2}{15}+\dfrac{7}{12}\right)=1-\dfrac{43}{60}=\dfrac{17}{60}$.

• ou bien vous utilisez le principe des probabilités totales :

$p(N)=p(S\cap N)+p(\overline{S}\cap N)=p(S)\times p_S(N)+p(\overline{S})\times p_{\overline{S}}(N)=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{2}{10}+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{17}{60}$.

2. ***a.*** A chaque tirage, de deux choses l'une : ou bien la boule est blanche de probabilité $p=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$, ou bien elle n'est pas blanche, de probabilité $q=1-p=\dfrac{1}{5}$. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli, répété 4 fois, de façon indépendante (la boule est remise) donc la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées suit la loi binomiale de paramètres 4 et $\dfrac{4}{5}$. $\quad p(X=0)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^4=\dfrac{1}{625}$.

b. $p(X=1)=\binom{4}{1}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^1\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^3=\dfrac{16}{625}$.

c. $p(X\geqslant1)=1-p(X=0)=1-\dfrac{1}{625}=\dfrac{624}{625}$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

39. **1.** $p(\mathrm{F}) = 1 - p(\overline{\mathrm{F}}) = 1 - \dfrac{12}{100} = 0{,}88$. $p_{\overline{\mathrm{F}}}(\overline{\mathrm{E}}) = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$. $p_{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{E}}) = \dfrac{8}{100} = 0{,}08$.

2. ***a.*** $p(\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{E}}) = p(\overline{\mathrm{F}}) \times p_{\overline{\mathrm{F}}}(\overline{\mathrm{E}}) = 0{,}12 \times 0{,}2 = 0{,}024$.

b. $p(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{E}}) = p(\mathrm{F}) \times p_{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{E}}) = 0{,}88 \times 0{,}08 = 0{,}0704$.

c. Les événements F et $\overline{\mathrm{F}}$ réalisant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales : $p(\overline{\mathrm{E}}) = p(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{E}}) + p(\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{E}}) = 0{,}0704 + 0{,}024 = 0{,}0944$.

3. $p_{\overline{\mathrm{E}}}(\overline{\mathrm{F}}) = \dfrac{p(\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{E}})}{p(\overline{\mathrm{E}})} = \dfrac{0{,}024}{0{,}0944}$. Valeur approchée à 10^{-4} près par défaut : 0,2542.

4. ***a.*** $p(\mathrm{F} \cap \mathrm{E}) = p(\mathrm{F}) \times p_{\mathrm{F}}(\mathrm{E}) = p(\mathrm{F}) \times \left[1 - p_{\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{E}})\right] = 0{,}88 \times (1 - 0{,}08) = 0{,}8096$.

b. Pour chacun des 20 véhicules contrôlés, il y a exactement deux issues possibles : ou bien il est en bon état (de probabilité p = 0,8096) ou bien il n'est pas en bon état (de probabilité q = 1 − p = 0,1904). Les contrôles étant indépendants les uns des autres, la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de véhicules en bon état suit la loi binomiale de paramètres 20 et 0,8096. L'événement "au moins un véhicule n'est pas en bon état" est le contraire de "les 20 véhicules sont en bon état".

$1 - p(X = 20) = 1 - 0{,}8096^{20}$. Valeur approchée à 10^{-4} près par défaut : 0,9853.

---

40. **1.** La seule possibilité d'avoir une seule couleur est de tirer une face bleue sur chaque disque. Les disques étant indépendants, $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Pour avoir deux couleurs, il faut avoir deux faces bleues et une troisième d'une autre couleur, c'est-à-dire : bleu, bleu, vert ou bleu, jaune, bleu ou rouge, bleu, bleu.

$p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$. $p(\mathrm{C}) = 1 - [p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})] = 1 - \left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{1}{2}$.

2. ***a.*** $p(X = 10) = p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{8}$, $p(X = 5) = p(\mathrm{B}) = \dfrac{3}{8}$, $p(X = 0) = p(\mathrm{C}) = \dfrac{1}{2}$.

b. $\mathrm{E}(X) = 10 \times \dfrac{1}{8} + 5 \times \dfrac{3}{8} + 0 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{25}{8} = 3{,}125$.

3. • $Y = 0$ si le joueur tire les deux fois trois couleurs. $p(Y = 0) = p(X = 0) \times p(X = 0) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

• $Y = 5$ si le joueur tire une fois deux couleurs et l'autre fois trois couleurs.

$p(Y = 5) = p(X = 5) \times p(X = 0) + p(X = 0) \times p(X = 5) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$.

• $Y = 10$ si le joueur tire une fois trois couleurs et l'autre fois une couleur, ou bien s'il tire les deux fois deux couleurs.

$p(Y = 10) = p(X = 0) \times p(X = 10) + p(X = 10) \times p(X = 0) + p(X = 5) \times p(X = 5)$

$p(Y = 10) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{17}{64}$.

• $Y = 15$ si le joueur tire une fois une couleur et l'autre fois deux couleurs.

$p(Y = 15) = p(X = 5) \times p(X = 10) + p(X = 10) \times p(X = 5) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{3}{32}$.

• $Y = 20$ si le joueur tire les deux fois une couleur.

$p(Y = 20) = p(X = 10) \times p(X = 10) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{64}$.

$\mathrm{E}(Y) = 0 \times \dfrac{1}{4} + 5 \times \dfrac{3}{8} + 10 \times \dfrac{17}{64} + 15 \times \dfrac{3}{32} + 20 \times \dfrac{1}{64} = \dfrac{25}{4} = 6{,}25$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

41. Partie A

1. les jetons sont extraits simultanément. Un tirage est donc une combinaison. Pour obtenir un total égal à 400, la seule possibilité est de tirer deux des quatre jetons portant le nombre 100 et un des trois jetons portant le nombre 200. $p(X=400)=\dfrac{\binom{4}{2}\times\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}=\dfrac{6\times 3}{35}=\dfrac{18}{35}$.

2. ***a.*** La variable aléatoire X prend quatre valeurs :

- X = 300 en tirant trois des quatre jetons portant le nombre 100. $p(X=300)=\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\dfrac{4}{35}$.
- X = 400, cas déjà étudié. $p(X=400)=\dfrac{18}{35}$.
- X = 500 en tirant un des quatre jetons portant le nombre 100 et deux des trois jetons portant le nombre 200. $p(X=500)=\dfrac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}=\dfrac{4\times 3}{35}=\dfrac{12}{35}$.
- X = 600 en tirant les trois jetons portant le nombre 200. $p(X=600)=\dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}=\dfrac{1}{35}$.

b. $E(X)=300\times\dfrac{4}{35}+400\times\dfrac{18}{35}+500\times\dfrac{12}{35}+600\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{15000}{35}=\dfrac{3000}{7}$.

Partie B

1. On doit donc tirer successivement deux jetons de 100 ou bien deux jetons de 200 :

$$p=\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{18}{35}.$$

2. La somme est égale à 300 si, et seulement si, les nombres tirés sont différents (100 + 200), c'est-à-dire l'événement contraire du précédent. $p=1-\dfrac{18}{35}=\dfrac{17}{35}$.

3. Désignons par C l'événement "avoir tiré 100 de U_1" et T l'événement "la somme est égale à 300". $p_T(C)=\dfrac{p(C\cap T)}{p(T)}$. L'événement $C\cap T$ correspond à une somme égale à 300 avec un premier jeton numéroté 100. Le second doit donc porter le nombre 200.

$$p_T(C)=\frac{p(C\cap T)}{p(T)}=\frac{\frac{4}{7}\times\frac{2}{5}}{\frac{17}{35}}=\frac{8}{17}.$$

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

42. **1.** Les boules sont tirées simultanément. Un tirage est donc une ***combinaison***.
Pour l'événement A, il s'agit de tirer : ou bien deux des quatre boules rouges, ou bien deux des trois boules vertes, ou bien deux des n boules jaunes.

$$p(\mathrm{A})=\frac{\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{n}{2}}{\binom{n+7}{2}}=\frac{6+3+\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+7)(n+6)}{2}}=\frac{n^2-n+18}{n^2+13n+42}.$$

L'événement B est évidemment le contraire de A donc

$$p(\mathrm{B})=p(\overline{\mathrm{A}})=1-p(\mathrm{A})=1-\frac{n^2-n+18}{n^2+13n+42}=\frac{14n+24}{n^2+13n+42}.$$

2. $\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+7}{2}}=\frac{3}{13}\Leftrightarrow\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+7)(n+6)}{2}}=\frac{3}{13}\Leftrightarrow\frac{n(n-1)}{(n+7)(n+6)}=\frac{3}{13}\Leftrightarrow 13n(n-1)=3(n+7)(n+6)$

$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+7}{2}}=\frac{3}{13}\Leftrightarrow 10n^2-52n-126=0\Leftrightarrow 5n^2-26n-63=0$

$5x^2-26x-63$ a pour discriminant $\Delta=(-26)^2-4\times5\times(-63)=1936$. Ce nombre étant strictement positif, $5x^2-26x-63$ a deux racines : $\frac{26+\sqrt{1936}}{2\times5}=7$ et $\frac{26-\sqrt{1936}}{2\times5}=-\frac{9}{5}$.
La seule à être entier naturel est 7. Il y a donc 7 boules jaunes dans la boîte.

3. A chacune des 10 expériences, il y a deux issues possibles : ou bien A est réalisé (de probabilité $p=\frac{n^2-n+18}{n^2+13n+42}=\frac{49-7+18}{49+91+42}=\frac{60}{182}=\frac{30}{91}$) ou bien A n'est pas réalisé (de probabilité $q=1-p=\frac{61}{91}$). Les expériences étant indépendantes les unes des autres, la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A suit la ***loi binomiale*** de paramètres 10 et $\frac{30}{91}$, c'est-à-dire que pour $k\in\{0\,;1\,;\ldots;10\}$, on a :

$$p(X=k)=\binom{10}{k}\times\left(\frac{30}{91}\right)^k\times\left(\frac{61}{91}\right)^{10-k}.$$

43. **1.** ***a.*** Puisque deux faces sont bleues, $p=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{243}$.

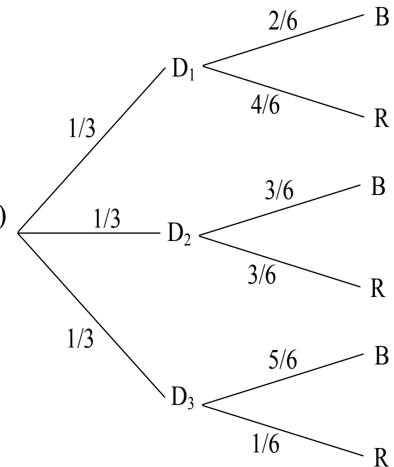
b. Les tirages étant indépendants, le nombre X de réalisations de l'événement "la face est bleue" suit la loi binomiale de paramètres 5 et $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

$$p(X=4)=\binom{5}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{10}{243}.$$

c. $p(X\geqslant1)=1-p(X=0)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

2. ***a.*** Désignons par D_1, D_2 et D_3 les événements "le 1er dé est pris", le 2ème dé est pris", "le 3ème dé est pris". Vous pouvez faire un arbre :



Les événements D_1, D_2 et D_3 réalisant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{B}) + p(\mathrm{D}_2 \cap \mathrm{B}) + p(\mathrm{D}_3 \cap \mathrm{B})$$

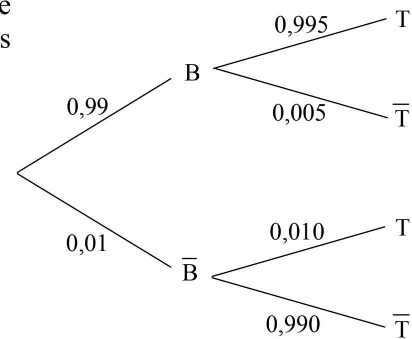
$$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{D}_1) \times p_{\mathrm{D}_1}(\mathrm{B}) + p(\mathrm{D}_2) \times p_{\mathrm{D}_2}(\mathrm{B}) + p(\mathrm{D}_3) \times p_{\mathrm{D}_3}(\mathrm{B})$$

$$p(\mathrm{B}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

b. $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{D}_3) = \dfrac{p(\mathrm{D}_3 \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{B})} = \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{6}}{\frac{5}{9}} = \dfrac{1}{2}.$

---

44. **1.** ***a.***



b. Les événements B et $\overline{\mathrm{B}}$ constituant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

$$p(\overline{\mathrm{T}}) = p(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{T}}) + p(\overline{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{T}})$$

$$p(\overline{\mathrm{T}}) = p(\mathrm{B}) \times p_{\mathrm{B}}(\overline{\mathrm{T}}) + p(\overline{\mathrm{B}}) \times p_{\overline{\mathrm{B}}}(\overline{\mathrm{T}})$$

$$p(\overline{\mathrm{T}}) = 0{,}99 \times 0{,}005 + 0{,}01 \times 0{,}990 = 0{,}01485$$

valeur approchée à 10^{-3} près par défaut : 0,014.

$$p(\mathrm{T}) = 1 - p(\overline{\mathrm{T}}) = 1 - 0{,}01485 = 0{,}98515$$

valeur approchée à 10^{-3} près par défaut : 0,985.

2. ***a.*** $p_{\overline{\mathrm{T}}}(\mathrm{B}) = \dfrac{p(\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{T}})}{p(\overline{\mathrm{T}})} = \dfrac{0{,}99 \times 0{,}005}{0{,}01485} = \dfrac{1}{3}$ valeur approchée à 10^{-3} près par défaut : 0,333.

b. Pour chacune des 20 pièces écartées de la vente, il y a deux issues : ou bien elle est bonne (de probabilité $p = \frac{1}{3}$) ou bien elle ne l'est pas (de probabilité $q = 1 - p = \frac{2}{3}$). Puisque les tirages sont indépendants, la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de pièces bonnes suit la loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{1}{3}$.

$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{20}$ valeur approchée à 10^{-3} près par défaut : 0,999.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

45. **1.** Un tirage est une combinaison. Il s'agit de tirer la boule rouge et deux boules parmi les 9 blanches. $p = \dfrac{\binom{1}{1} \times \binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{1 \times 36}{120} = \dfrac{3}{10}$.

2. Pour chacune des 5 expériences, il y a deux issues : ou bien il y a une boule rouge (de probabilité $p = \dfrac{3}{10}$) ou bien il n'y en a pas (de probabilité $q = 1 - p = \dfrac{7}{10}$). Puisque les tirages sont indépendants et réalisés dans les mêmes conditions (les boules tirées sont remises), la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de boules rouges suit la loi binomiale de paramètres 5 et $\dfrac{3}{10}$.

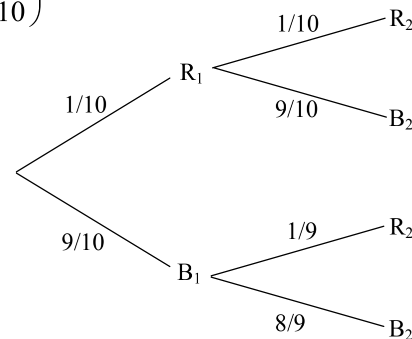
Pour $k \in \{0 ; 1 ; \dots ; 5\}$, on a : $p(X = k) = \binom{5}{k} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^k \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^{5-k}$.

3. Les événements B et $\overline{\text{B}}$ constituant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

$p(\text{R}_2) = p(\text{R}_1 \cap \text{R}_2) + p(\text{B}_1 \cap \text{R}_2)$

$p(\text{R}_2) = p(\text{R}_1) \times p_{\text{R}_1}(\text{R}_2) + p(\text{B}_1) \times p_{\text{B}_1}(\text{R}_2)$

$p(\text{R}_2) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{10} + \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{11}{100}$.



46. **1.**

	C_1	$\overline{C_1}$
C_2	110	60
$\overline{C_2}$	75	5

2. $p(\text{A}) = p(\overline{\text{C}_1} \cap \overline{\text{C}_2}) = \dfrac{5}{250} = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$.

$p(\text{B}) = p(\text{C}_1 \cap \overline{\text{C}_2}) = \dfrac{75}{250} = \dfrac{3}{10} = 0{,}3$.

$p(\text{C}) = p(\overline{\text{C}_1} \cap \text{C}_2) = \dfrac{60}{250} = \dfrac{6}{25} = 0{,}24$.

3. ***a.*** X prend les valeurs 0 (aucun contrôle), 1 (un seul contrôle) et 2 (les deux contrôles).

b. $p(X = 0) = p(\text{A}) = 0{,}02$

$p(X = 1) = p(\text{B} \cup \text{C}) = p(\text{B}) + p(\text{C}) = 0{,}3 + 0{,}24 = 0{,}54$.

B et C sont incompatibles

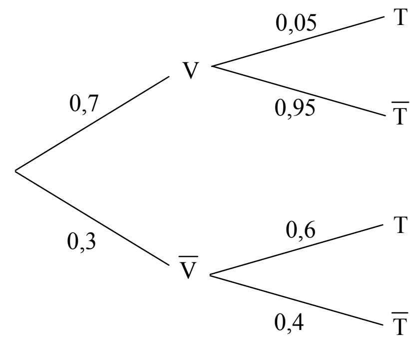
$p(X = 2) = \dfrac{110}{250} = \dfrac{11}{25} = 0{,}44$.

c. $\text{E(X)} = 0 \times 0{,}02 + 1 \times 0{,}54 + 2 \times 0{,}44 = 1{,}42$.

C'est le nombre moyen de contrôles que passe une résistance (sur un très, très grand nombre de résistances).

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

47. **1.** ***a.*** On peut commencer par réaliser un arbre.



Désignons par V et T les événements "l'individu a été vacciné" et "l'individu a été touché par la maladie".

Les événements V et $\overline{\text{V}}$ constituant une partition de l'univers, on peut appliquer le ***principe des probabilités totales*** :

$p(\text{T}) = p(\text{V} \cap \text{T}) + p(\overline{\text{V}} \cap \text{T})$

$p(\text{T}) = p(\text{V}) \times p_{\text{V}}(\text{T}) + p(\overline{\text{V}}) \times p_{\overline{\text{V}}}(\text{T})$

$p(\text{T}) = 0,7 \times 0,05 + 0,3 \times 0,6 = 0,215$.

b. $p_{\text{T}}(\text{V}) = \dfrac{p(\text{V} \cap \text{T})}{p(\text{T})} = \dfrac{0,7 \times 0,05}{0,215} = \dfrac{35}{215} = \dfrac{7}{43} \approx 0,16$.

2. ***a.*** $p_n = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (0,98)^n$.

b. $p_n \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 1 - (0,98)^n \geqslant 0,95$

$p_n \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 0,05 \geqslant (0,98)^n$

$p_n \geqslant 0,95 \Leftrightarrow \ln 0,05 \geqslant \ln(0,98)^n$ — la fonction ln est croissante.

$p_n \geqslant 0,95 \Leftrightarrow \ln 0,05 \geqslant n \ln 0,98$

$p_n \geqslant 0,95 \Leftrightarrow \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,98} \leqslant n$ — on divise par ln0,98 qui est négatif puisque 0,98 < 1.

$\dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,98} \approx 148,28$. Il faut donc prendre n au moins égal à 149.

---

48. **1.** On tire simultanément les boules. Un tirage est donc une combinaison de deux boules prises parmi les neuf. Pour tirer deux boules de même couleur, on peut : ou bien tirer deux des quatre boules rouges, ou bien les deux bleues, ou bien deux des trois vertes.

$$p_1 = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6+1+3}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

2. Même principe, mais cette fois, il ne s'agit plus de combinaisons (au besoin, faites un arbre !) :

$$p_2 = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + \frac{3}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{16+4+9}{81} = \frac{29}{81}.$$

3. ***a.*** Loi de probabilité de X : $p(\text{X} = 10n) = p_1 = \dfrac{5}{18}$ et $p(\text{X} = -n^2) = 1 - p_1 = \dfrac{13}{18}$

d'où $\text{E}(\text{X}) = 10n \times \dfrac{5}{18} - n^2 \times \dfrac{13}{18} = \dfrac{50n - 13n^2}{18}$.

Loi de probabilité de Y : $p(\text{Y} = 10n) = p_2 = \dfrac{29}{81}$ et $p(\text{Y} = -n^2) = 1 - p_2 = \dfrac{52}{81}$

d'où $\text{E}(\text{Y}) = 10n \times \dfrac{29}{81} - n^2 \times \dfrac{52}{81} = \dfrac{290n - 52n^2}{81}$.

b. $\text{E}(\text{X}) < 0 < \text{E}(\text{Y}) \Leftrightarrow \dfrac{50n - 13n^2}{18} < 0 < \dfrac{290n - 52n^2}{18} \Leftrightarrow \left[\left(n < 0 \text{ ou } n > \dfrac{50}{13}\right) \text{ et } \left(0 < n < \dfrac{290}{52}\right)\right]$

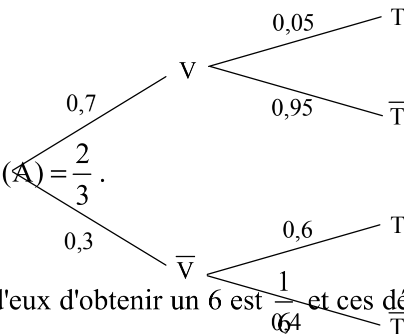
$\text{E}(\text{X}) < 0 < \text{E}(\text{Y}) \Leftrightarrow \dfrac{50}{13} < n < \dfrac{290}{52}$ (faites un dessin pour y voir plus clair)

$n = 4$ ou $n = 5$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

49. **1.** ***a.*** L'événement $\overline{\text{A}}$ est « l'un des dés tirés est spécial ».

b. Un tirage est une combinaison de deux des trois dés.



$$p(\text{A})=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}}=\frac{1}{3} \text{ et } p(\overline{\text{A}})=1-p(\text{A})=\frac{2}{3}.$$

2. ***a.*** Les deux dés étant normaux, la probabilité sur chacun d'eux d'obtenir un 6 est $\frac{1}{6}$ et ces dés sont indépendants donc $p_{\text{A}}(\text{B})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

b. Les événements A et $\overline{\text{A}}$ constituant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

$$p(\text{B})=p(\text{A}\cap\text{B})+p(\overline{\text{A}}\cap\text{B})=p(\text{A})\times p_{\text{A}}(\text{B})+p(\overline{\text{A}})\times p_{\overline{\text{A}}}(\text{B})$$

$$p(\text{B})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{36}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{7}{108}.$$

Il y a un dé normal (probabilité $\frac{1}{6}$) et le dé spécial (probabilité : $\frac{3}{6}$)

3. $$p_{\text{B}}(\text{A})=\frac{p(\text{A}\cap\text{B})}{p(\text{B})}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{36}}{\frac{7}{108}}=\frac{1}{7}.$$

---

50. **1.** ***a.*** $p_1=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$ (N'oubliez pas qu'à chaque fois il y a une boule de moins !).

b. Il reste à savoir si la boule blanche est en première, deuxième, troisième ou dernière position. Dans chaque cas la probabilité est la même.

$$p_2=\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=4\times\frac{2}{15}=\frac{8}{15}.$$

2. ***a.*** $p_1=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{8}{81}$.

b. $$p_2=\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=4\times\frac{8}{81}=\frac{32}{81}.$$

3. ***a.*** $\text{P}_1=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\text{P}_2=\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{9}$, $\text{P}_3=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{4}{27}$, …, $\text{P}_n=\underbrace{\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}\times\ldots\times\frac{4}{6}}_{n-1\text{ premiers tirages}}\times\frac{2}{6}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}$.

b. On peut constater que la suite (P_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ donc

$$\text{S}_n=\text{P}_1+\text{P}_2+\text{P}_3+\ldots+\text{P}_n=\text{P}_1\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Puisque $-1<\frac{2}{3}<1$, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$ donc (théorèmes d'opérations) $\lim_{n\to+\infty}\text{S}_n=1$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

51. **Partie A**

1. Par hypothèse, $p(\mathrm{G}_1)=\frac{1}{2}$, $p_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{G}_2)=0,6$ et $p_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{P}_2)=0,7$ donc $p_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{G}_2)=1-p_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{P}_2)=0,3$.

Les événements G_1 et P_1 constituant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

$$p(\mathrm{G}_2)=p(\mathrm{G}_1\cap\mathrm{G}_2)+p(\mathrm{P}_1\cap\mathrm{G}_2)=p(\mathrm{G}_1)\times p_{\mathrm{G}_1}(\mathrm{G}_2)+p(\mathrm{P}_1)\times p_{\mathrm{P}_1}(\mathrm{G}_2)$$

$$p(\mathrm{G}_2)=\frac{1}{2}\times 0,6+\frac{1}{2}\times 0,3=0,45.$$

2. $p(\mathrm{P}_2)=1-p(\mathrm{G}_2)=0,55$.

Partie B

1. $p_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{P}_{n+1})=1-p_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{G}_{n+1})=1-0,6=0,4$ et $p_{\mathrm{P}_n}(\mathrm{P}_{n+1})=0,7$.

2. Les événements G_n et P_n constituant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

$$x_{n+1}=p(\mathrm{G}_{n+1})=p(\mathrm{G}_n\cap\mathrm{G}_{n+1})+p(\mathrm{P}_n\cap\mathrm{G}_{n+1})=p(\mathrm{G}_n)\times p_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{G}_{n+1})+p(\mathrm{P}_n)\times p_{\mathrm{P}_n}(\mathrm{G}_{n+1})$$

$$x_{n+1}=x_n\times 0,6+y_n\times(1-0,7)=0,6x_n+0,3y_n.$$

$$y_{n+1}=p(\mathrm{P}_{n+1})=p(\mathrm{G}_n\cap\mathrm{P}_{n+1})+p(\mathrm{P}_n\cap\mathrm{P}_{n+1})=p(\mathrm{G}_n)\times p_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{P}_{n+1})+p(\mathrm{P}_n)\times p_{\mathrm{P}_n}(\mathrm{P}_{n+1})$$

$$x_{n+1}=x_n\times 0,4+y_n\times 0,7=0,4x_n+0,7y_n.$$

3. ***a.*** Pour tout entier naturel n non nul, $v_n=x_n+y_n=1$ puisque x_n et y_n sont les probabilités de deux événements contraires.

b. Pour tout entier naturel n non nul,

$$w_{n+1}=4x_{n+1}-3y_{n+1}=4(0,6x_n+0,3y_n)-3(0,4x_n+0,7y_n)=1,2x_n-0,9y_n=0,3(4x_n-3y_n)$$

$w_{n+1}=0,3w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique, de raison 0,3.

4. ***a.*** Le terme général de la suite (w_n) est :

$$w_n=w_1\times 0,3^{n-1}=(4x_1-3y_1)\times 0,3^{n-1}=\left(4\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{2}\right)\times 0,3^{n-1}=\frac{1}{2}\times 0,3^{n-1}.$$

$$\begin{cases}x_n+y_n=1\\4x_n-3y_n=\frac{1}{2}\times 0,3^{n-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_n=1-x_n\\4x_n-3(1-x_n)=\frac{1}{2}\times 0,3^{n-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_n=1-x_n\\7x_n=3+\frac{1}{2}\times 0,3^{n-1}\end{cases}$$

d'où $x_n=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}\times 0,3^{n-1}$.

b. Puisque $-1<0,3<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}0,3^{n-1}=0$ d'où (théorèmes d'opérations) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\frac{3}{7}$.

---

52. **1.** La boule rouge en premier : $p(\mathrm{X}=-1)=\frac{1}{7}$

La boule rouge en deuxième : $p(\mathrm{X}=2)=\frac{6}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{7}$

La boule rouge en troisième : $p(\mathrm{X}=-3)=\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{7}$

La boule rouge en quatrième : $p(\mathrm{X}=4)=\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{7}$

La boule rouge en cinquième : $p(\mathrm{X}=-5)=\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{7}$

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

La boule rouge en sixième : $p(\mathrm{X}=6)=\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{7}$

La boule rouge en septième : $p(\mathrm{X}=-7)=\frac{6}{7}\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{7}$

2. $\mathrm{E(X)}=-7\times\frac{1}{7}+(-5)\times\frac{1}{7}+(-3)\times\frac{1}{7}+(-1)\times\frac{1}{7}+2\times\frac{1}{7}+4\times\frac{1}{7}+6\times\frac{1}{7}=-\frac{4}{7}$

$\mathrm{E(X^2)}=49\times\frac{1}{7}+25\times\frac{1}{7}+9\times\frac{1}{7}+1\times\frac{1}{7}+4\times\frac{1}{7}+16\times\frac{1}{7}+36\times\frac{1}{7}=20$

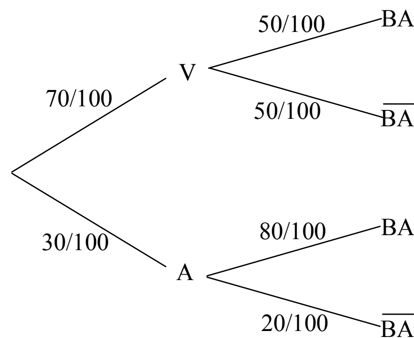
$\mathrm{V(X)}=\mathrm{E(X^2)}-[\mathrm{E(X)}]^2=20-\frac{16}{49}=\frac{964}{49}\approx 19{,}67$.

3. "La première boule est blanche" élimine seulement le cas $\mathrm{X}=-1$.

$$p_{\mathrm{X}\neq -1}(\mathrm{X}\geqslant 0)=\frac{p\big((X\neq -1)\cap(\mathrm{X}>0)\big)}{p(X\neq -1)}=\frac{p(\mathrm{X}>0)}{p(X\neq -1)}=\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{1}{7}}=\frac{1}{2}.$$

---

53. 1. Désignons par BA l'événement "être bon en anglais".



2. $p(\mathrm{E})=p(\mathrm{V}\cap\mathrm{BA})=\frac{70}{100}\times\frac{50}{100}=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$.

$p(\mathrm{F})=p(\mathrm{A}\cap\mathrm{BA})=\frac{30}{100}\times\frac{80}{100}=\frac{24}{100}=\frac{6}{25}$.

Les événements V et A constituant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

$p(\mathrm{G})=p(\mathrm{BA})=p(\mathrm{V}\cap\mathrm{BA})+p(\mathrm{A}\cap\mathrm{BA})=\frac{35}{100}+\frac{24}{100}=\frac{59}{100}$.

---

54. 1. ***a.*** Pour tout entier naturel n non nul,

$$v_{n+1}=13u_{n+1}-4=13\left(\frac{4}{10}-\frac{3}{10}u_n\right)-4=\frac{12}{10}-\frac{39}{10}u_n=-\frac{3}{10}(13u_n-4)=-\frac{3}{10}v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $-\frac{3}{10}$.

Son terme général est donc :

$$v_n=v_1\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}=(13u_1-4)\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}=(13a-4)\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

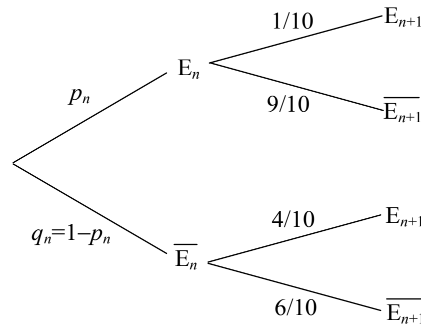
b. Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n=\frac{v_n+4}{13}=\frac{(13a-4)\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+4}{13}=\left(a-\frac{4}{13}\right)\times\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}+\frac{4}{13}.$$

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

c. Puisque $-1 < -\frac{3}{10} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 0$ donc (théorèmes d'opérations) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{13}$.

2. ***a.***



Les événements E_n et $\overline{E_n}$ constituant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p(E_n) \times p_{E_n}(E_{n+1}) + p(\overline{E_n}) \times p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{1}{10} + q_n \times \frac{4}{10} = p_n \times \frac{1}{10} + (1 - p_n) \times \frac{4}{10} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10} p_n$$

b. On constate que $p_n = u_n = (13a - 4) \times \left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{4}{13}$, indépendante de a.

---

55. 1. ***a.*** Pour chacun des six obstacles, il y a deux issues possibles : ou bien un "sans faute", de probabilité $\frac{2}{3}$ ou bien "avec faute", de probabilité $\frac{1}{3}$. Les obstacles étant indépendants, la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre d'obstacles franchis sans faute suit la ***loi binomiale*** de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{2}{3}$.

b. $E(X) = n \times p = 6 \times \frac{2}{3} = 4$. La vitesse est de 10 km/h, soit $\frac{10000}{60} = \frac{500}{3}$ m/min.

Le temps "sans faute" est de 9 minutes : $t = \frac{d}{v} = \frac{1500}{\frac{500}{3}} = 9$.

Comme le nombre moyen d'obstacles "avec faute" est égal à 2, il faut ajouter un temps moyen perdu de 2 minutes d'où la durée moyenne du parcours : 11 minutes.

2. ***a.*** $p(Y = 0) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (0 point au premier et au deuxième obstacle)

$p(Y = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ (2 points au premier ou bien au deuxième obstacle)

$p(Y = 4) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (2 points au premier et au deuxième obstacle)

$p(Y = 5) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ (5 points au premier ou bien au deuxième obstacle)

$p(Y = 7) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ (5 points au premier ou au deuxième obstacle et 2 à l'autre)

$p(Y = 10) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ (5 points au premier et au deuxième obstacle)

b. $E(Y) = 0 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{1}{18} + 4 \times \frac{1}{36} + 5 \times \frac{2}{9} + 7 \times \frac{2}{9} + 10 \times \frac{4}{9} = \frac{22}{3}$

$p(Y \geqslant 5) = p(Y = 5) + p(Y = 7) + p(Y = 10) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

56. 1. *a.* $p(\mathrm{E}_1)=\frac{1}{3}$.

Si E_1 est réalisé, on a tiré un jeton blanc du sac S_1 donc il y a un jeton noir et deux blancs dans le sac S_2 d'où $p_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{E}_2)=\frac{2}{3}$.

En revanche, si $\overline{\mathrm{E}_1}$ est réalisé, on a tiré un jeton noir du sac S_1 donc il y a deux jetons noirs et un blanc dans le sac S_2 d'où $p_{\overline{\mathrm{E}_1}}(\mathrm{E}_2)=\frac{1}{3}$.

Les événements E_1 et $\overline{\mathrm{E}_1}$ constituant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

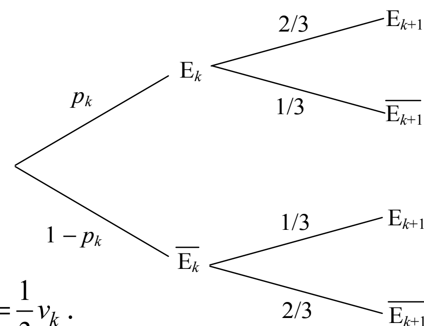
$$p(\mathrm{E}_2)=p(\mathrm{E}_1\cap\mathrm{E}_2)+p(\overline{\mathrm{E}_1}\cap\mathrm{E}_2)=p(\mathrm{E}_1)\times p_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{E}_2)+p(\overline{\mathrm{E}_1})\times p_{\overline{\mathrm{E}_1}}(\mathrm{E}_2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}.$$

b. Toujours selon le principe des probabilités totales :

$$p_{k+1}=p(\mathrm{E}_{k+1})=p(\mathrm{E}_k\cap\mathrm{E}_{k+1})+p(\overline{\mathrm{E}_k}\cap\mathrm{E}_{k+1})$$

$$p_{k+1}=p(\mathrm{E}_k)\times p_{\mathrm{E}_k}(\mathrm{E}_{k+1})+p(\overline{\mathrm{E}_k})\times p_{\overline{\mathrm{E}_k}}(\mathrm{E}_{k+1})$$

$$p_{k+1}=p_k\times\frac{2}{3}+(1-p_k)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}p_k+\frac{1}{3}.$$



2. *a.* Pour tout entier naturel k non nul :

$$v_{k+1}=u_{k+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}u_k+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}u_k-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(u_k-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}v_k.$$

La suite (v_k) est géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1=u_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$.

b. La suite (v_k) a pour terme général : $v_k=v_1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=-\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

Si vous préférez : $v_k=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$.

La suite (u_k) a pour terme général : $u_k=v_k+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$.

Puisque $-1<\frac{1}{3}<1$, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=0$ donc (théorèmes d'opérations) $\lim\limits_{k\to+\infty}u_k=\frac{1}{2}$.

3. $0{,}4999\leqslant u_k\leqslant 0{,}5\Leftrightarrow\frac{1}{2}-0{,}0001\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^k\leqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow -0{,}0001\leqslant-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^k\leqslant 0$

$0{,}4999\leqslant u_k\leqslant 0{,}5\Leftrightarrow 0\leqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^k\leqslant 0{,}0001\Leftrightarrow\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^k\leqslant 0{,}0001$ première inégalité forcément vérifiée

$0{,}4999\leqslant u_k\leqslant 0{,}5\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\right)^k\leqslant 0{,}0002\Leftrightarrow\ln\left(\frac{1}{3}\right)^k\leqslant\ln 0{,}0002\Leftrightarrow k\ln\frac{1}{3}\leqslant\ln 0{,}0002$

$0{,}4999\leqslant u_k\leqslant 0{,}5\Leftrightarrow k\geqslant\frac{\ln 0{,}0002}{-\ln 3}$. Comme $\frac{\ln 0{,}0002}{-\ln 3}\approx 7{,}75$, on a $k\in\{8\,;9\,;10\}$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

57. 1. Puisqu'on tire simultanément les jetons, un tirage est une combinaison de cinq jetons pris parmi les douze.

$$p(\text{X}=0)=\frac{\binom{7}{5}}{\binom{12}{5}}=\frac{21}{792}=\frac{7}{264} \qquad p(\text{X}=1)=\frac{\binom{7}{4}\times\binom{5}{1}}{\binom{12}{5}}=\frac{175}{792}$$

$$p(\text{X}=2)=\frac{\binom{7}{3}\times\binom{5}{2}}{\binom{12}{5}}=\frac{350}{792}=\frac{175}{396} \qquad p(\text{X}=3)=\frac{\binom{7}{2}\times\binom{5}{3}}{\binom{12}{5}}=\frac{210}{792}=\frac{35}{132}$$

$$p(\text{X}=4)=\frac{\binom{7}{1}\times\binom{5}{4}}{\binom{12}{5}}=\frac{35}{792} \qquad p(\text{X}=5)=\frac{\binom{5}{5}}{\binom{12}{5}}=\frac{1}{792}$$

$$\text{E}(\text{X})=0\times\frac{21}{792}+1\times\frac{175}{792}+2\times\frac{350}{792}+3\times\frac{210}{792}+4\times\frac{35}{792}+5\times\frac{1}{792}=\frac{1650}{792}=\frac{25}{12}\approx 2{,}08\,.$$

2. *a.* Pour chacun des 5 tirages, il y a deux issues possibles : ou bien le jeton est blanc, de probabilité $p=\frac{5}{12}$, ou bien il n'est pas blanc, de probabilité $q = 1 - p = \frac{7}{12}$. Les tirages étant indépendants et réalisés dans les mêmes conditions, la variable aléatoire Y prenant pour valeur le nombre de jetons blancs tirés suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p=\frac{5}{12}$.

Pour $k\in\{0\,;1\,;\ldots;5\}$ $\quad p(\text{Y}=k)=\binom{5}{k}\times\left(\frac{5}{12}\right)^k\times\left(\frac{7}{12}\right)^{5-k}$, ce qui donne :

$p(\text{Y}=0)\approx 0{,}068$ $\qquad p(\text{Y}=1)\approx 0{,}241$ $\qquad p(\text{Y}=2)\approx 0{,}345$

$p(\text{Y}=3)\approx 0{,}246$ $\qquad p(\text{Y}=4)\approx 0{,}088$ $\qquad p(\text{Y}=5)\approx 0{,}013$

b. Puisqu'il s'agit de la loi binomiale,

$$\text{E}(\text{Y})=n\times p=5\times\frac{5}{12}=\frac{25}{12}\approx 2{,}08\,.$$

$$\sigma(\text{Y})=\sqrt{n\times p\times q}=\sqrt{5\times\frac{5}{12}\times\frac{7}{12}}=\frac{5\sqrt{7}}{12}\approx 1{,}10\,.$$

---

58. 1. *a.* Par hypothèse, $p(\overline{\text{I}})=\frac{5}{100}$ donc $p(\text{I})=1-p(\overline{\text{I}})=1-\frac{5}{100}=0{,}95$.

b. $\text{E}=\overline{\text{I}}\cap\overline{\text{C}}$ et $\text{F}=\text{I}\cap\overline{\text{C}}$.

$$p(\text{E})=p(\overline{\text{I}}\cap\overline{\text{C}})=p(\overline{\text{I}})\times p_{\overline{\text{I}}}(\overline{\text{C}})=\frac{5}{100}\times\left(1-\frac{70}{100}\right)=0{,}015\,.$$

$$p(\text{F})=p(\text{I}\cap\overline{\text{C}})=p(\text{I})\times p_{\text{I}}(\overline{\text{C}})=\frac{95}{100}\times\frac{90}{100}=0{,}855\,.$$

Les événements I et $\overline{\text{I}}$ constituant une partition de l'univers, on peut appliquer le principe des probabilités totales :

$$p(\overline{\text{C}})=p(\text{I}\cap\overline{\text{C}})+p(\overline{\text{I}}\cap\overline{\text{C}})=p(\text{F})=p(\text{E})=0{,}855+0{,}015=0{,}87\,.$$

$$p(\text{C})=1-p(\overline{\text{C}})=0{,}13\,.$$

2. Pour chacun des cinq paquets, il y a deux issues possibles : ou bien il est intact, de probablité 0,95, ou bien il ne l'est pas, de probabilité 0,05. Les paquets étant indépendants, la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de paquets intatcs suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}95$.

$$p(X=4)+p(X=5)=\binom{5}{4}\times(0{,}95)^4\times(0{,}05)^1+(0{,}95)^5\approx 0{,}9774.$$

Même principe avec C, de probabilité 0,13 et $\overline{\text{C}}$, de probabilité 0,87 : $0{,}87^5\approx 0{,}4984$.

---

59. **1.** ***a.*** Pour chacun des 40 trajets, il y a deux issues possibles : ou bien il y a contrôle, de probabilité $\frac{1}{10}$, ou bien il n'y a pas contrôle, de probabilité $\frac{9}{10}$. Les trajets étant indépendants, la variable aléatoire X prenant pour valeur le nombre de contrôles suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{1}{10}$.

Pour tout $k\in\{0\ ;\ 1\ ;\ \dots\ ;\ 40\}$, $p(X=k)=\binom{40}{k}\times\left(\frac{1}{10}\right)^k\times\left(\frac{9}{10}\right)^{40-k}$.

b. Le nombre moyen de trajets contrôlés est : $\text{E}(X)=n\times p=40\times\frac{1}{10}=4$.

c. Le coût moyen mensuel des trajets pour un usager qui ne se procurera pas le titre de transport C est donc de $4\times$M.
Les deux choix proposés aux usagers sont financièrement équivalents pour la compagnie si, et seulement si, $4\text{M}=100 \Leftrightarrow \text{M}=25$.

2. ***a.*** $p(X=0)=\binom{40}{0}\times\left(\frac{1}{10}\right)^0\times\left(\frac{9}{10}\right)^{40}\approx 0{,}015$.

$p(X=1)=\binom{40}{1}\times\left(\frac{1}{10}\right)^1\times\left(\frac{9}{10}\right)^{39}\approx 0{,}066$

$p(X=2)=\binom{40}{2}\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times\left(\frac{9}{10}\right)^{38}\approx 0{,}142$

$p(X=3)=\binom{40}{3}\times\left(\frac{1}{10}\right)^3\times\left(\frac{9}{10}\right)^{37}\approx 0{,}200$

b. Si A ne s'est pas procuré le titre de transport C, le coût de ses trajets mensuels est au moins égal à 100 euros si, et seulement si, il est contrôlé au moins 4 fois.
$p(X\geqslant 4)=1-[p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)]\approx 0{,}577$.

---

60. **A. 1.** $p(X=0)=\left(\frac{40}{100}\right)^4=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}=0{,}0256$.

2. $p(X=1)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}=0{,}6$ $\qquad p(X=2)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}=0{,}24$

$p(X=3)=\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{12}{125}=0{,}096$ $\qquad p(X=4)=\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}=\frac{24}{625}=0{,}0384$

B. 1. Pour k variant de 1 à n, $p(X=k)=\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\times\frac{3}{5}$

2. $\text{E}(X)=0\times p(X=0)+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+3\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}+\dots+n\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\times\frac{3}{5}$

EXERCICES DE PROBABILITÉS – SOLUTIONS

$$E(X)=\frac{3}{5}\times\left[1+2\times\frac{2}{5}+3\times\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+n\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]=\frac{3}{5}Q\left(\frac{2}{5}\right).$$

3. ***a.*** En dérivant les deux membres, on obtient :

$$1+2x+\ldots+nx^{n-1}=\frac{(n+1)x^n\times(x-1)-\left(x^{n+1}-1\right)\times 1}{(x-1)^2}$$ c'est-à-dire

$$Q(x)=\frac{(n+1)\left(x^{n+1}-x^n\right)-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-nx^n+x^{n+1}-x^n-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=\frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{(x-1)^2}$$

On peut simplifier partiellement par $x-1$:

$$Q(x)=\frac{nx^n(x-1)}{(x-1)^2}+\frac{1-x^n}{(x-1)^2}=\frac{nx^n}{x-1}+\frac{1-x^n}{(x-1)^2}.$$

b. $$E(X)=\frac{3}{5}Q\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{5}\times\left[\frac{n\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{2}{5}-1}+\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}-1\right)^2}\right]=\frac{3}{5}\times\left[\frac{n\left(\frac{2}{5}\right)^n}{-\frac{3}{5}}+\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{9}{25}}\right]$$

$$E(X)=\frac{3}{5}\times\left[-\frac{5}{3}\times n\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{25}{9}\times\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)\right]=-n\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{5}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n=\frac{5}{3}-\left(n+\frac{5}{3}\right)\times\left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

Il est peut-être dommage que l'on n'ait pas demandé la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$: pour $0<a<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}na^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}E(X)=\frac{5}{3}$.

---

61. 1. ***a.*** Les portes 2 et 5 ne rapportent rien. Le gain du joueur est alors –2 €.

$$p(Y=-2)=p(X=2)+p(X=5)=\frac{5}{32}+\frac{5}{32}=\frac{5}{16}.$$

Les portes 3 et 4 rapportent 2 €. le gain du joueur est alors 0 €.

$$p(Y=0)=p(X=3)+p(X=4)=\frac{10}{32}+\frac{10}{32}=\frac{5}{8}.$$

Enfin, les portes 1 et 6 rapportent 12 €. Le gain du joueur est alors 10 €.

$$p(Y=10)=p(X=1)+p(X=6)=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}.$$

b. $E(X)=-2\times\frac{5}{16}+0\times\frac{5}{8}+10\times\frac{1}{16}=0$. Le jeu est donc équitable.

2. ***a.*** En cinq parties, la seule possibilité pour avoir un gain total nul est d'avoir un gain nul à chaque partie. En six parties, par exemple, on aurait pu gagner une fois 10 € et perdre cinq fois 2 €.

$$\left(\frac{5}{8}\right)^5\approx 0{,}095.$$

b. On commence par chercher la probabilité de l'événement contraire : ne jamais gagner 12 €, c'est-à-dire gagner 2 € ou rien à chaque partie. $\left(\frac{5}{16}+\frac{5}{8}\right)^5=\left(\frac{15}{16}\right)^5$.

La probabilité que le joueur reçoive au moins une fois 12 € est donc $1-\left(\frac{15}{16}\right)^5\approx 0{,}276$.